



**UNIVERSIDAD  
ACADEMIA**  
DE HUMANISMO CRISTIANO

PROGRAMA DE FORMACIÓN  
PEDAGÓGICA EN ENSEÑANZA  
MEDIA PARA PROFESIONALES

# **Propuesta didáctica utilizando tecnología para la función cuadrática en 3° medio mediante el manejo de software o sitio web**

Nombres: Ronny Aldo Mena Alarcón  
Marco Antonio Vidal Jiménez  
Curso: Seminario de Grado - II.  
Docente: Claudio Tapia Fuentes

Tesis para optar al Grado de Licenciado en Educación  
Tesis para optar al Título de Profesor de Enseñanza Media, con mención en Matemática

Santiago, 2018

## Propuesta didáctica utilizando tecnología para la función cuadrática en 3° medio mediante el manejo de software o sitio web

Mena Alarcón, Ronny Aldo; Vidal Jiménez, Marco Antonio.  
Universidad Academia Humanismo Cristiano, Santiago. Chile.

### Resumen

Los estudiantes presentan una mayor familiaridad con las tecnologías de la información y comunicación (TIC), e incluso un dominio técnico, pero no necesariamente se traducen a una utilización de las herramientas tecnológicas con fines educativos ni para el desarrollo de procesos o competencias académicas. La incorporación de las TIC de forma habitual en los procesos de enseñanza y aprendizaje no es una tarea fácil, pero si se potencia podría existir una posibilidad de transformación de la acción educativa y efectiva que contribuya a que los estudiantes comprendan más y mejor. Como objetivo se pretende, desarrollar una propuesta didáctica de matemática en la unidad de funciones y cuyo objeto matemático son las funciones cuadráticas para el curso de 3° medio, incorporando la articulación de las tecnologías de la información y comunicación.

**Palabras claves:** Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC), Función cuadrática, Enseñanza para la Comprensión (EpC), Registro de Representación Semiótica (RRS).

### 1. Introducción.

La importancia que tiene el avance y aplicación tecnológica en el desarrollo de la humanidad en los últimos años, ha impulsado la necesidad de poder comprender las diferentes formas de operaciones tecnológicas en las comunicaciones. Sin embargo, existe una brecha generacional entre alumnos y profesores. *“Los estudiantes superan a los profesores en el dominio de TIC, son capaces de acceder de forma más fácil a datos y a información que circula en la red... Viven en una cultura de la interacción, sus formas de comunicación se basan en la interactividad a través de un medio instantáneo como lo es la*

*Internet. Los profesores que se están formando, se van a encontrar con alumnos que pertenecen a una nueva generación digital, en la cual la información y el aprendizaje no están relegados a los muros de la escuela, no son ofrecidos por el profesor de forma exclusiva” (Silva, J., Gros B., Garrido J., Rodríguez J. 2006 p. 2).*

Poder descubrir una manera de obtener mayor ventaja de las tecnologías y aplicarlas en el proceso de enseñanza y aprendizaje podría ser un proceso complejo, debido a que no sólo sería requisito seleccionar un buen hardware o software, sino también poder entender que son medios interactivos que evolucionan muy rápidamente y requieren capacitación continua y actualizada de los usuarios. A pesar de esto,

no sólo sería necesario aprender a usar la tecnología, sino que podría incluirse al proceso el reflexionar sobre la manera en que las prácticas promovidas por las tecnologías cuestionan los supuestos previos sobre que habría que enseñar y como debería enseñarse.

El currículum educativo debería diseñarse de tal forma que integre las nuevas tecnologías de manera que el resultado esencial sea el poder lograr la comprensión de los alumnos y además, generar mayor interés en el proceso enseñanza aprendizaje, enriqueciendo de conocimiento a todos los participantes activos en dicho proceso.

Asimismo, la tecnología podría poseer un significativo potencial para mejorar la comprensión de los estudiantes, pero aún así, no se evidencia en forma masiva, que forme parte del repertorio de herramientas educativas de los docentes. Al aprender a manejar una herramienta haciendo un trabajo significativo, el alumno no sólo desarrollaría las habilidades prácticas, además podría llegar a comprender las ventajas y las limitaciones de esa herramienta.

Es así, que es primordial referirse a marcos teóricos explícitos, a evidencias empíricas o teóricas que fundamentan las estrategias de acción. Uno de esos marcos es la “Enseñanza para la Comprensión”, donde investigadores y docentes analizaron y estudiaron casos de las prácticas docentes en relación con las actuales teorías de la cognición y la enseñanza. Según Perkins (1998), **comprender** un tema es “*poder*

*realizar una presentación flexible de él: explicarlo, justificarlo, extrapolarlo, relacionarlo y aplicarlo de maneras que vayan más allá del conocimiento y la repetición rutinaria de habilidades. Comprender implica poder pensar y actuar flexiblemente utilizando lo que uno sabe”* (citado en Stone M., 2006 p.36).

Otra arista de marco teórico a considerar y que se encuentra dentro de la Didáctica de la Matemática son los “Registros de Representación Semiótica”, trabajada por Raymond Duval (1999). Sostiene que el proceso cognitivo se genera al realizar vínculos entre las diversas formas de representación semiótica que tenga un concepto u objeto de estudio, o sea, es primordial que el alumno se enfrente con estas diversas representaciones y en especial en matemática, para luego establecer vínculos y lograr un tránsito coherente y comprensible entre ellos.

En nuestro caso, todo toma sentido cuando queremos enseñar y trabajar las funciones cuadráticas. Nos preguntamos por lo tanto, ¿cómo hacer comprensiva, significativa y efectiva las funciones cuadráticas mediante las TIC, la enseñanza para la comprensión y los registros de representación semiótica?

## 2. **Problematización.**

La enseñanza en la educación no es sólo transferir información sino lograr que los alumnos obtengan un aprendizaje significativo. Existen distintas formas para lograr este fin, sin embargo, es la especialidad de “Didáctica” la que ha tomado una posición sobresaliente en

cuanto a su aplicación e implementación en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Por otro lado, en la actualidad existe una vasta incorporación de las tecnologías y comunicaciones (TIC) en todo ámbito de la vida de las personas; en el trabajo, en los estudios básicos, medios y superiores, en las entretenimientos y socializaciones, etc. Para las nuevas generaciones que nacen con estas tecnologías les es muy fácil y amigable su uso, en cambio, para muchos adultos les dificulta de alguna manera el dominio mínimo para ser un usuario de dichas tecnologías.

Una de las TIC que se encuentra en internet es el software “Geogebra”, cuya utilidad es poder realizar y operar las funciones, como las funciones cuadráticas entre muchas otras operaciones.

Por lo anterior, es importante que en el proceso de enseñanza aprendizaje se incorporen las TIC, sin embargo, existen varias problemáticas para que sea efectiva y significativa en dicho proceso:

- Los alumnos utilizan mayoritariamente la tecnología como entretenimiento y no como una herramienta útil en el aprendizaje.
- Falta mayor enlace en cuanto a la Didáctica de cada especialidad y el uso de TIC.
- Fortalecer las TIC en los programas curriculares y planificaciones escolares.

### **3. Pregunta de investigación.**

¿Pueden los alumnos comprender mejor las funciones cuadráticas mediante el uso de tecnología ya sea por algún software o sitio web?

### **4. Hipótesis.**

“El diseño de una propuesta TIC en la asignatura de matemáticas para las funciones cuadráticas de 3º Medio mediante el uso de herramientas tecnológicas permite un aumento en el logro de los aprendizajes de dichas funciones”.

### **5. Objetivo general.**

Diseñar una propuesta tecnológica en la asignatura de Matemática para las funciones cuadráticas que se enmarcan dentro del programa de estudios de Enseñanza Media de 3º Medio mediante la articulación de las TIC.

### **6. Objetivos específicos.**

- a) Diseñar una propuesta tecnológica en la asignatura de Matemática para las funciones cuadráticas en los alumnos de 3º Medio mediante un programa computacional online.
- b) Utilizar el software de Geogebra para la obtención de las funciones cuadráticas en su forma algebraica y gráfica.
- c) Comprender, analizar y aplicar las funciones cuadráticas a la vida real o materias transversales.
- d) Conjeturar e interpretar resultados de los experimentos y sus gráficos obtenidos.

e) Lograr que las funciones cuadráticas puedan ser comprendidos en forma significativa por los alumnos, otorgándoles una visión más acabada de la utilidad que tienen las matemáticas y las tecnologías para la vida cotidiana y sus propios intereses.

## **7. Estado del arte.**

Las tecnologías de la red incluyen: páginas web, descargas de software, páginas interactivas, correos electrónicos, redes sociales y muchas otras aplicaciones. Todas ofrecen muchas formas de trabajo y colaboración entre profesores y alumnos otorgando estudios e interacciones tanto dentro como fuera del aula.

Existen numerosos proyectos on-line que hacen participar a docentes y alumnos en investigaciones cooperativas y en iniciativas en acción social que contribuyen que los estudiantes lleguen a apreciar más profundamente otras realidades y no sólo la propia. La unión de un marco teórico y las abundantes herramientas tecnológicas promueven la investigación y experimentación en el proceso enseñanza aprendizaje.

En nuestro país, el Ministerio de Educación (Mineduc), a través del Proyecto Enlaces, ha elaborado una “Matriz de Habilidades TIC para el Aprendizaje”, (Mineduc 2013) y que se ha promovido en todas las instituciones educacionales. Considera como criterios fundamentales la consistencia de las

dimensiones y habilidades con el currículum nacional, mayor cobertura de ámbitos y habilidades, y precisión de las definiciones. Esto ha permitido alinear la política educativa reuniendo esfuerzos en torno al desarrollo de un conjunto de habilidades bien definidas y, por otra parte, comunicar con claridad a los distintos actores del sistema educativo. Dicha matriz considera dimensiones, sub dimensiones, habilidades, definiciones operacionales y comportamientos observables; y, finalmente, se presentan ejemplos de actividades para desarrollar las habilidades en los estudiantes.

## **8. Diseño Metodológico.**

### **Marco teórico.**

Para nuestro marco teórico nos posicionamos en tres aristas importantes; I) Enseñanza para la Comprensión, II) Matriz de Habilidades TIC y II) Registro de Representación Semiótica (RRS).

### **I. Enseñanza para la comprensión.**

En el sistema educacional el docente juega un papel primordial, debido a su rol de educador, este debe contar con objetivos claros y coordinar sus esfuerzos de forma coherente para contribuir a alcanzar el éxito en el aprendizaje de sus educandos. Para apoyar esta premisa algunos autores han originado una propuesta, “Enseñanza para la Comprensión” (EpC), liderado por Marta Stone Wiske, Kristi Rennebhom Franz y Lisa Breit.

El marco de EpC posee una amplia variedad de enfoques educativos, concentrando el aprendizaje significativo y estrategias que logren hacer participar a los alumnos en su proceso de aprendizaje con el fin de otorgarles mayor sentido a sus estudios. Este modelo incluye los **tópicos generativos, las metas de comprensión, los desempeños de comprensión, la evaluación continua.**

a) **Tópicos generativos:** *“...son los temas, conceptos, teorías, ideas y/o contenidos del currículo. Para poder determinar el contenido del currículo socialmente relevante, culturalmente pertinente y personalmente significativo se vincula necesariamente con los intereses y necesidades, preocupaciones y experiencias que se ocupan los educandos en su vida cotidiana...La toma de decisiones sobre el currículo parte de las reflexiones de vincular el trabajo escolar y la vida cotidiana de los alumnos...Esto es, los tópicos generativos toman en cuenta los intereses y experiencias de los estudiantes, en lugar de seguir los libros de texto corrientes e impuestos. Los tópicos deben ser auténticos, accesibles e interesantes para los alumnos; atractivos y estimulantes para el docente...”* (Stone M., 2006 p.67-88).

b) **Metas de comprensión:** *“...afirman explícitamente lo que se espera que los alumnos lleguen a comprender, es decir, definen de manera específica y clara las ideas, procesos, relaciones o preguntas que los alumnos comprenderán por medio de la*

*investigación, acción y/o reflexión...Abarcan múltiples dimensiones, entre ellas, el conocimiento importante, los métodos de indagación y razonamientos, los propósitos del aprendizaje y las formas de expresión; están conectadas de tal forma que las metas de una lección se relacionan con los objetivos de largo plazo y con los objetivos generales o hilos conductores...Las metas de comprensión se enfocan en los conceptos claves y los modos disciplinados de pensar, dejando a un segundo plano los datos y las fórmulas asilados que constituyen gran parte de los materiales de enseñanza tradicionales...”* (Stone M., 2006 p.89-123).

c) **Desempeños de comprensión:** *“...demuestran y desarrollan la comprensión de los educandos y de los objetivos establecidos...Promueven el pensamiento creativo y aprendizaje efectivo y activo conllevando a expandir la mente de los alumnos...Esta comprensión se realiza mediante una secuencia de actividades que van desde la exploración (etapa inicial), pasando por una guiada investigación, hasta los desempeños finales de integración...Estimulan al alumno a afrontar los temas desde una amplia y variada perspectiva y poniendo en acción las inteligencias múltiples...El valor de los desempeños es central en el proceso y resultado, además de la evaluación diagnóstica en la educación...Los desempeños de comprensión permiten a los alumnos debatir, construir, producir y presentar de manera activa lo que han*

*comprendido y no sólo escuchar o recitar el conocimiento creado por otros...” (Stone M., 2006 p.125-157).*

- d) **Evaluación continua:** *“...la forma de averiguar lo que comprenden los educandos es a través de la evaluación diagnóstica continua de desempeños en relación con las metas de comprensión. La evaluación se debe realizar con frecuencia con el propósito de generar sugerencias para mejorar dichos desempeños. La evaluación es descriptiva, porque el docente va registrando los avances en la comprensión de acuerdo con los estilos y ritmos de aprendizaje personalizados de los estudiantes, y luego podrá compararlos con las metas de comprensión que generalmente se prescriben en las formas de evaluación de la comprensión deseada e intencional. Las evaluaciones continuas dan la oportunidad de que los alumnos critiquen sus propios productos y el trabajo de sus*

*compañeros, utilizando criterios explícitos y proponiendo sugerencias para mejorar el trabajo...En respuesta a la evaluación continua, habitualmente los estudiantes hacen múltiples revisiones de productos y presentaciones clave en lugar de tomar sus primeros informes como bases de la presentación final...Asimismo, los estudiantes pueden retroalimentarse al realizar sus propias autoevaluaciones continuas y compararlos con el trabajo de sus pares, sirviendo así, de complemento a las evaluaciones de los docente” (Stone M., 2006 p.159-184).*

Pues bien, estos elementos en conjunto se complementan mediante un proceso y una serie de criterios que guían a los docentes en la tarea de planificar y evaluar estrategias que motiven, induzcan y activen la comprensión de sus alumnos, como se resume en la tabla1.

**Tabla 1: Cuadro resumen de las definiciones de EpC. (Stone M., 2006 p.45).**

<b>CUADRO ENSEÑANZA PARA LA COMPRENSIÓN (EpC)</b>	
<b>1. TÓPICOS GENERATIVOS</b>	<b>2. METAS DE COMPRENSIÓN</b>
<i>¿Qué tópicos o temas vale la pena comprender?</i>	<i>¿Qué aspectos de esos tópicos deben ser comprendidos?</i>
<i>¿Qué contenidos o temas merecen ser comprendidos?</i>	<i>¿Qué es exactamente lo que los alumnos deberían comprender de ese tema?</i>
1. Están conectados con múltiples ideas de la propia materia y de las demás.	1. Están claramente definidas y han sido expresadas abiertamente. Se concentran en las grandes ideas.
2. Son auténticos, accesibles e interesantes para los alumnos.	2. Se concentran en las grandes ideas, más allá de memorizar datos y repetir rutinas.
3. Son fascinantes e inspiradores para los docentes.	3. Abarcan múltiples dimensiones: conocimiento, métodos de indagación y razonamiento, propósitos para el aprendizaje y formas de comunicación.
4. Puede abordárselos desde una variedad de ángulos y a través de una amplia gama de materiales curriculares y tecnologías disponibles.	4. Están conectadas de manera coherente de modo que los objetivos de una lección particular se relacionan con los objetivos de largo plazo y con otros más generales o hilos conductores.
5. Tienen la cualidad de "inagotables", lo cual genera la indagación continua y la recompensa.	
<b>3. DESEMPEÑOS DE COMPRENSIÓN</b>	<b>4. EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA CONTINUA</b>
<i>¿Cómo podemos promover la comprensión?</i>	<i>¿Cómo podemos averiguar lo que comprenden los alumnos?</i>
<i>¿Cómo desarrollarán y demostrarán los alumnos su comprensión?</i>	<i>¿Cómo pueden evaluar docentes y alumnos lo comprendido?</i>
1. Desarrollan y demuestran la comprensión de los objetivos fijados.	1. Se basa en criterios explícitos y públicos directamente relacionados con las metas de comprensión
2. Demandan un aprendizaje activo y un pensamiento creativo para expandir las mentes de los alumnos.	2. Se efectúa con frecuencia y genera sugerencias para mejorar el rendimiento.
3. Construyen la comprensión mediante actividades en secuencias que parten de una "etapa de exploración" preliminar, pasan por una investigación guiada y arriban a un desempeño final de integración.	3. Incluye evaluaciones informales incorporadas al aprendizaje, así como estructuras y productos más formales.
4. Demandan una variedad de ricas perspectivas e inteligencias múltiples.	4. Utiliza fuentes múltiples: autoevaluaciones y evaluaciones de los pares, así como la retroalimentación suministrada por docentes, instructores y otros.

## II. Matriz de Habilidades TIC.

En la actualidad tanto los profesores como los estudiantes convivimos con un entorno tecnológico desarrollando nuevas prácticas en la forma de comunicarse y aprender. La mayor parte de las actividades cotidianas están relacionadas con las comunicaciones de los medios digitales y ya son parte de una necesidad para el desarrollo educacional, social y profesional. Pedró menciona que: *“...se considera que la generación del nuevo milenio es, por definición, adepta a los ordenadores, extremadamente creativa con la tecnología y, por encima de todo, muy acostumbrada a las multitareas en un mundo donde las conexiones ubicuas se dan por hecho...”* (Pedró F., 2006 p.2).

Desde junio del 2009, el Ministerio de Educación de Chile, a través de su Unidad de Currículo y Evaluación, presenta en su página Web (Ajuste curricular, Capítulos introductorios, n°8, pp. 3 y 4 – junio de 2009) las siguientes ideas sobre el tema de las competencias: *“Conocimientos, habilidades y actitudes son tres dimensiones de lo que la experiencia escolar busca entregar a cada estudiante para favorecer su desarrollo integral. Por ello, la selección curricular se refiere no sólo al conocimiento entendido como conceptos y procedimientos, sino también a las habilidades y las actitudes que necesitan adquirir los alumnos y alumnas para desenvolverse en distintos ámbitos de sus vidas”* (Mineduc, 2009 p.14).

De acuerdo a las competencias y estándares para las TIC, se hace referencia a la dimensión pedagógica, e indica que las competencias son: *“integrar las TIC en la planificación de ambientes y experiencias de aprendizaje de los sectores curriculares para agregar valor al aprendizaje y al desarrollo integral de los estudiantes; incorporar sistemas de información en línea y de comunicación mediada por computadores, incluyendo las redes sociales, pero toda bajo la intención pedagógica”* (Mineduc, 2009 p.15).

En cuanto a la enseñanza y aplicación de la unidad de funciones, es muy importante el uso de tecnologías digitales. Esto optimiza el proceso de enseñanza-aprendizaje facilitando los cálculos y visualización de gráficos. En el Marco Curricular, se recomienda el uso de software para esta Unidad, *“...el estudiante representa información o elabora un nuevo producto utilizando herramientas digitales... para proponer sus reflexiones o soluciones por medio de tablas, gráficos, cálculos y otros”* (Mineduc, 2009 p.16).

*“En el marco de su estrategia de integración de las TIC a la educación y el desarrollo de competencias en los diferentes actores del sistema escolar, el Centro de Educación y Tecnología, **Enlaces**, ha desarrollado diferentes iniciativas orientadas al desarrollo y medición de habilidades TIC en estudiantes. Entre ellas destacan la definición de un mapa de progreso de habilidades TIC funcionales (conocido como mapa K-12) para estudiantes, desarrollado el año 2006 y la Matriz de Habilidades TIC para*

*estudiantes del siglo XXI, desarrollada el año 2008. Ambos insumos fueron utilizados para el desarrollo del Sistema de medición de competencias TIC en estudiantes, SIMCE TIC, aplicado por primera vez a nivel nacional en el mes de noviembre del año 2011” (Mineduc, 2013 p.7).*

El año 2013 se presenta una actualización de la Matriz de habilidades TIC, como se presenta en la figura 1, dicha actualización se propuso mantener el enfoque constructivista adoptado en la matriz desarrollada el año 2008 por su consistencia con el marco curricular chileno y que se utiliza mayoritariamente a nivel internacional. No obstante, en esta nueva propuesta se incluyen aspectos del enfoque de Cultura participativa, dando mayor importancia a las habilidades de colaboración y aspectos del enfoque de ciencias de la computación, incluyendo habilidades de uso y manejo de TIC.

Las habilidades TIC para el Aprendizaje se define como: “La capacidad de resolver problemas de información, comunicación y conocimiento, así como dilemas legales, sociales y éticos en ambiente digital” (Mineduc, 2013 p.17). La matriz de Habilidades TIC para el Aprendizaje, se organiza en: Dimensiones, Sub-dimensiones, Habilidades, Definición operacional, Comportamientos observables, Criterios de progresión, como se indica en la figura 2.

*“Las dimensiones y sub-dimensiones de Información y Comunicación corresponden, se*

*refiere a ámbitos donde se despliegan actividades relacionadas con la información y comunicación en ambiente digital. Estas agrupan habilidades necesarias para desarrollar actividades que están relacionadas por compartir un mismo objetivo general (ej. Usar las TIC para trabajar con la información como una fuente versus usar las TIC para trabajar con la información para desarrollar un producto). Es importante tener en cuenta que, si bien estas se organizan conceptualmente por objetivo de trabajo y de forma secuencial, estas actividades se superponen y realizan de manera simultánea y dinámica. Por ejemplo, cuando se realiza un trabajo de investigación se busca información al mismo tiempo que se va elaborando el producto de información. Esto significa que en base a la información encontrada se va definiendo el producto y a la inversa, en base a lo que se va creando se vuelve a consultar otras fuentes” (Mineduc, 2013 p.17).*

Por otra parte, las dimensiones de Convivencia Digital y Tecnología y sus sub-dimensiones “...dan cuenta de aspectos que son transversales a las dos primeras dimensiones. Por ejemplo, las actividades relacionadas con el trabajo con información y su comunicación implican oportunidades de vincularse con otros o también presentan problemas y dilemas éticos que los estudiantes deben ir resolviendo. De la misma forma, todas las actividades descritas en la Matriz requieren un dominio funcional de las TIC y la capacidad de resolver

algunos problemas técnicos..." (Mineduc, 2013 p.19).



**Figura 1: La Matriz de habilidades TIC para el aprendizaje (2013):** definidas como la capacidad de resolver problemas de información, comunicación y conocimiento, así como dilemas legales, sociales y éticos en ambiente digital.

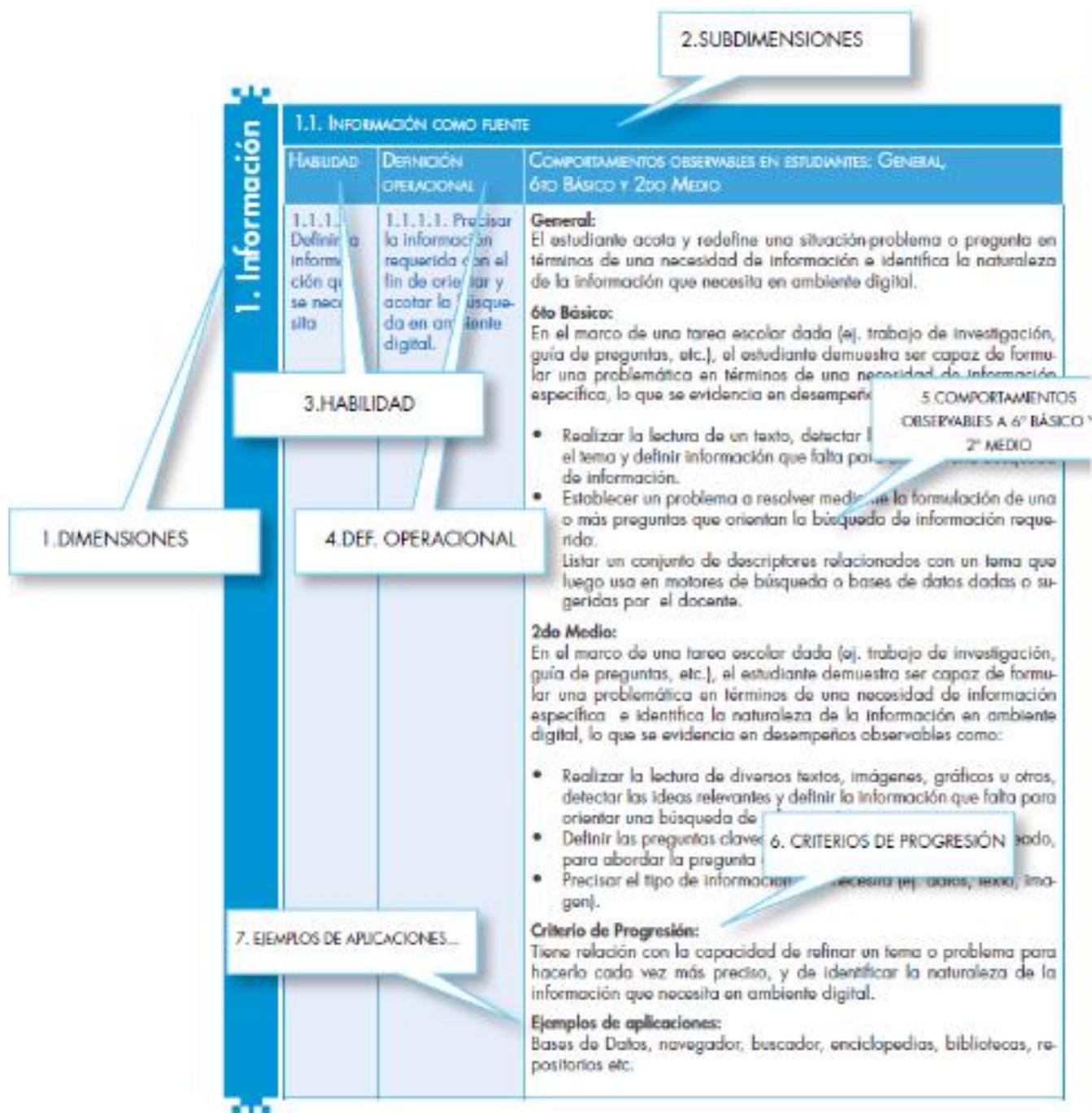


Figura 2: Organización de la Matriz de habilidades TIC para el aprendizaje (Mineduc, 2013 p.23): Dimensiones, Sub-dimensiones, Habilidades, Definición operacional, Comportamientos observables, Criterios de progresión y aplicaciones.

## II. III. Registro de Representación Semiótica (RRS)

Raymond Duval (1999), es uno de los teóricos que trabajó esta teoría didáctica que contiene los distintos tipos de registros y sus cambios de registros correspondientes, o sea, pasar de un tipo de registro a otro, que en dicha teoría de RRS se le denomina conversión. Los tipos de registros que están presentes son: registro de lenguaje natural (RLN), registro algebraico (RA), registro tabular (RT), registro gráfico (RG) y registro simbólico (RS).

En la didáctica de la matemática existen variados estudios, orientados al empleo de gráficas, diagramas, figuras u otras representaciones. Duval (1999) indica que el aprendizaje de las matemáticas es un área de estudio muy importante para el análisis de actividades cognitivas, entre ellas la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos.

La teoría didáctica que orientará la unidad de funciones, corresponde a la "Teoría de Registros de Representación Semiótica (RRS)". En estos términos de representación se concentran los autores que han incursionado en estas investigaciones: Raymond Duval (1999), Luis Radford (1998), Juan Godino y Carmen Batanero (1994, 1998), entre otros.

Según Radford (1998), las representaciones son parte primordial del

sistema conceptual, tan necesario para poder confeccionar un análisis de los procesos de enseñanza, asignación, comprensión y aprendizaje de los significados que adquieren los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas. Por lo tanto, las representaciones semióticas tienen relación con representar los conceptos mediante el lenguaje de signos.

Los objetos físicos se logran experimentar, pero los objetos matemáticos, sólo se pueden representar. A esto, se agrega la complejidad de que los objetos matemáticos no son de fácil acceso, ni muy perceptibles mentalmente como los objetos físicos. Según Duval (1999) en la semiosis debe existir un proceso de producción de representaciones externas, pues bien, hay que entender dicha semiosis como la aprehensión o la producción de una representación semiótica que está ligada a la Neosis, y este último, se comprende como la aprehensión conceptual de un objeto.

Para que un sistema de signos pertenezca a un registro de representación, Duval (2006), indica que debe contener tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis; la formación, el tratamiento y la conversión de un registro de representación semiótica identificable. Estas dos últimas se establecen como transformaciones semióticas.

En concreto, son necesarias las representaciones y la coordinación de los distintos registros de representación semiótica en el proceso de aprendizaje de las ideas

matemáticas. Dicha coordinación entre los distintos registros de representación semiótica permite la adquisición de conocimientos debido a que, *“la comprensión de un contenido conceptual reposa sobre la coordinación de al menos dos registros de representación, y esa coordinación se manifiesta por la rapidez y espontaneidad de las actividades de conversión”* (Duval, 2006, p.63).

Se distinguen dos clases de transformaciones de representación semiótica que son: la conversión y el tratamiento. Para comprender y diferenciar estas dos clases de transformaciones se ha tomado el siguiente ejemplo (Duval, 2006, p.146):

**Ejemplo:** Transformación de una representación semiótica en otra.  
“Juan es 3 años mayor que Pedro. Juntos tienen 23 años de edad.  
¿Qué edad tienen?”

**Conversión:** se cambia el registro de representación semiótica, sin cambiar los objetos indicados.

$$x + (x + 3) = 23$$

**Tratamiento:** una vez realizada la conversión se realiza el tratamiento, donde mantiene el mismo sistema semiótico.

$$x + (x + 3) = 23$$

$$2x + 3 = 23$$

$$2x = 23 - 3$$

En el ejemplo, se presenta un problema que muestra la diferencia entre la conversión y el tratamiento. La conversión, transforma o cambia el registro de representación semiótica, de un lenguaje natural a un lenguaje algebraico, pero sin hacer ninguna operación de desarrollo. El tratamiento, al contrario, es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada, en este caso existe un desarrollo algebraico de la ecuación al interior del lenguaje algebraico.

Por tanto, según Duval (2009), el tratamiento es una transformación interna a un RRS y la conversión es una transformación externa al RRS de partida. Es decir, para pensar conceptos e ideas matemáticas es necesaria una representación interna, así mismo, para que sea posible la comunicación de dichas ideas es imprescindible una representación externa que sea analógicamente similar a la representación interna.

Godino y Batanero (1998), proponen una noción de significado institucional y personal de los objetos matemáticos. En el caso de las funciones cuadráticas, permitió analizar el objeto, entre el significado institucional pretendido y el personal adquirido por los alumnos. Para que una práctica se considere significativa, funcionalmente debe poder resolver problemas, para comunicar, validar o extender su solución.

## 10. Propuesta preliminar: 3º año Medio

Habilidades matemáticas:

-Modelar situaciones diversas a través de funciones

- Formular conjeturas generalizando en forma algebraica.

### **Unidad II: ÁLGEBRA, representado en Tabla 2.**

AE 1: Reconocer el tipo de situaciones que modelan las funciones cuadráticas.

AE 2: Representar la función cuadrática mediante tablas, gráficos, y algebraicamente.

AE 3: Modelar situaciones reales por medio de la función cuadrática, para resolver problemas relativos a situaciones de cambio cuadrático.

**Aprendizajes Esperados en relación con los OFT,** (Programa de Estudio de Matemática para 3º año medio, 2009, p.74):

- *Desarrollar el interés por conocer la realidad y utilizar el conocimiento.*
- *Comprender y valorar la perseverancia, el rigor, el cumplimiento, la flexibilidad y la originalidad.*
- *Buscar y acceder a información de diversas fuentes virtuales.*

## Orientaciones didácticas para la unidad

- *En esta unidad se trabaja la función cuadrática en situaciones reales, las cuales representan un cambio cuadrático, como por ejemplo: movimientos rectilíneos constantemente acelerados, lanzamientos en el deporte, construcciones técnicas que tienen una forma parabólica, etc. En este sentido se hace relevante, destacar la función cuadrática para modelar situaciones estáticas y dinámicas, que se traduce en un tratamiento diferente de la función y de los componentes de la gráfica.*
- *En las actividades hay que hacer notar que la función cuadrática se puede apreciar de forma dinámica en dos situaciones: la primera corresponde a una trayectoria parabólica, y la segunda corresponde a situaciones de tiempo versus desplazamiento.*
- *Resolver problemas en diferentes contextos por medio de la función cuadrática y modelar éstos, permitirá a las y los alumnos comprender los algoritmos relacionados a todos los cálculos numéricos. Con el fin de fomentar la habilidad de “Resolver Problemas”, se recomienda que se realicen conexiones con otras asignaturas como Física, Arte, Deporte, etc.*
- *En cuanto a la solución de ecuaciones de segundo grado, se sugiere trabajar paralelamente en forma gráfica y simbólica, para identificar y representar las situaciones en las cuales hay dos o una solución real o una solución compleja.*

**Tabla 2: Unidad II de Matemática “Álgebra” para 3º Medio:** se indican los Aprendizajes Esperados (AE) y los indicadores de evaluación sugeridos (Programa de Estudio para 3º año medio, 2009, p.74.)

<b>Aprendizajes Esperados</b> (Se espera que los estudiantes sean capaces de)	<b>Indicadores de Evaluación Sugeridos</b> (Los estudiantes que han logrado este aprendizaje)
AE 1 Reconocer el tipo de situaciones que modelan las funciones cuadráticas.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Determinan qué situaciones pueden ser modeladas con la función cuadrática.</li> <li>• Dan ejemplos cotidianos de cambios no lineales.</li> <li>• Dan ejemplos cotidianos de cambios cuadráticos.</li> </ul>
AE 2 Representar la función cuadrática mediante tablas y gráficos, y algebraicamente.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Representan valores (x,y) de la función cuadrática en tablas y en el plano cartesiano.</li> <li>• Varían los valores de a, b y c, conjeturando sobre los efectos que tiene en la representación gráfica de la función.</li> <li>• Determinan las intersecciones de la gráfica de la función con el eje X (ceros de la función).</li> </ul>
AE 3 Modelar situaciones reales por medio de la función cuadrática, para resolver problemas relativos a situaciones de cambio cuadrático.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Utilizan modelos dados de función cuadrática para resolver problemas relativos a situaciones de cambio cuadrático.</li> <li>• Elaboran modelos para resolver problemas relativos a situaciones de cambio cuadrático.</li> </ul>

Cabe destacar que esta unidad es de aplicación y con miras a eventuales futuras profesiones, por ejemplo en el caso de constructor, diseñador, físico, arquitecto, comerciante, etc. Por este motivo, es fundamental la comprensión del problema y de sus posibles implicancias, en caso de que al conjeturar las posibles soluciones al problema, alguno de los factores sea desechado o ignorado.

Recordando que toda función cuadrática, mediante la ecuación cuadrática, siempre tiene dos soluciones, que pueden ser iguales o diferentes, reales o complejas, en esta unidad hace sentido analizar y visualizar cómo un error de cálculo se traduce en la gráfica o en la respuesta a un problema modelado por una función cuadrática.

El Mineduc (2009b), recomienda varios programas matemáticos para Windows que permiten el uso de gráficas.

Así, con el objetivo de diseñar una propuesta tecnológica en la asignatura de Matemática para las funciones cuadráticas de 3º Medio, los alumnos descargarán una *aplicación* en sus dispositivos móviles, el software gratuito llamado “GeoGebra”, ideal para obtener funciones cuadráticas en su forma algebraica y gráfica.

Así también, con el objetivo específico de comprender, analizar y aplicar las funciones cuadráticas a la vida real o materias transversales, el programa de GeoGebra permitirá a los estudiantes modificar las funciones de forma dinámica, de manera que los alumnos puedan determinar con mayor fluidez los puntos de corte de la parábola, y por tanto la factorización de una función cuadrática.

Se indica a los alumnos que las funciones cuadráticas tienen la forma de parábola, se abre hacia arriba o hacia abajo y se expresan por la función general:

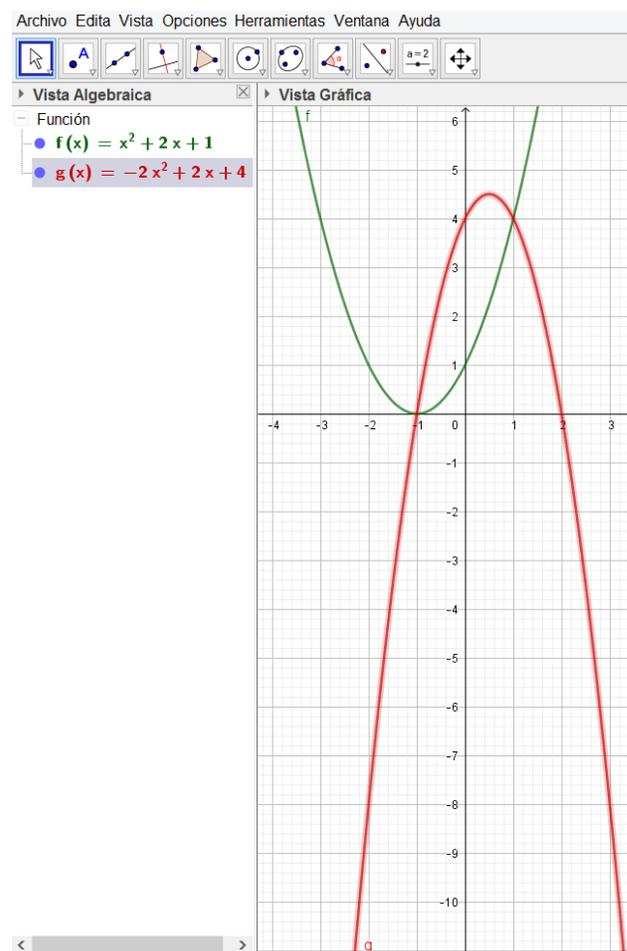
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde  $x$  es incógnita variable y  $a$ ,  $b$ ,  $c$  son constantes;  $a$  y  $b$  son los coeficientes que acompañan a la incógnita y  $c$  es el valor sin acompañar a la incógnita. Para encontrar el vértice de la parábola de la función cuadrática, los alumnos utilizarán la expresión  $x = -2b/a$

Para comprender el significado de los coeficientes, se les solicita a los estudiantes que representen dos funciones con el programa de GeoGebra, como se indica en la figura 3:

$$f(x) = x^2 + 2x + 1$$

$$g(x) = -2x^2 + 2x + 4$$



**Figura 3: Representación de funciones cuadráticas mediante el programa GeoGebra:** En color verde se representa la función  $f(x) = x^2 + 2x + 1$ , la parábola se abre hacia arriba, es decir, es convexa y su punto de corte en el eje  $y = 1$ . En color rojo se representa la función  $g(x) = -2x^2 + 2x + 4$ , la parábola se abre hacia abajo, es decir es cóncava y su punto de corte en el eje  $y = 4$ .

Se les indica a los alumnos modificar los coeficientes que acompañan a la incógnita  $x$ , comenzando primero por el coeficiente  $a$  que acompaña al  $x^2$ . Pueden cambiarlos de signo, amplificarlos o simplificarlos o incluso utilizar valores decimales o fraccionarios, de manera que traduzcan esos cambios algebraicos en sus respectivas gráficas.

Así, los alumnos pueden conjeturar e interpretar los resultados de sus modificaciones al coeficiente  $a$  que acompaña al  $x^2$  y sus gráficos obtenidos. Determinarán que cuando el coeficiente  $a$  es positivo, la gráfica tiene forma de parábola que se abre hacia arriba, es decir es “convexa”, por el contrario, si el coeficiente  $a$  es negativo, la gráfica tiene forma de parábola que se abre hacia abajo, es decir es “cóncava”.

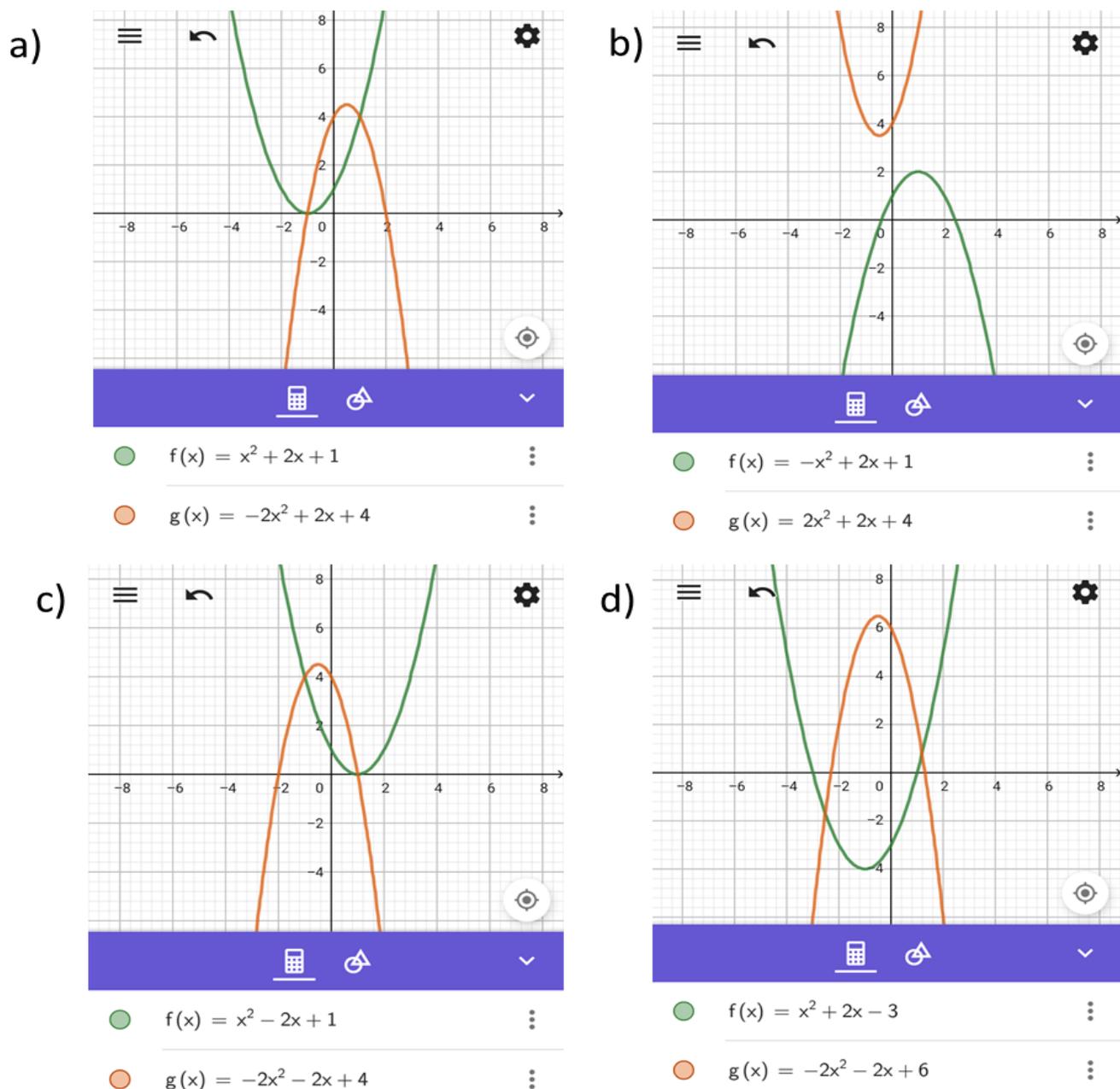
Este coeficiente  $a$  en la función cuadrática se le denomina “orientación de la parábola” y puede tomar cualquier valor real, pero no puede ser cero, ya que anularía la función cuadrática transformándola en una función lineal.

Luego se les indica modificar el coeficiente  $b$ , que acompaña a la variable  $x$ , de manera que los estudiantes puedan conjeturar e interpretar los resultados de sus modificaciones al coeficiente  $b$  que acompaña al  $x$  y sus gráficos obtenidos. Determinarán que cuando el coeficiente  $b$  es más positivo, la gráfica se trasladará a la izquierda, por el contrario, si el coeficiente  $b$  es más negativo, la gráfica se trasladará a la derecha. Pero si la

función cuadrática presentara un valor del coeficiente  $a$  negativo, entonces sería todo lo opuesto, pudiendo los alumnos factorizar la función por un  $(-1)$ .

Finalmente, se les indica modificar el coeficiente  $c$ , es decir, el coeficiente que NO acompaña a la variable  $x$ , de manera que los estudiantes puedan conjeturar e interpretar los resultados de sus modificaciones al coeficiente  $c$  y sus gráficos obtenidos. Determinarán que cuando el coeficiente  $c$  es más positivo, la gráfica se trasladará hacia arriba en el eje  $Y$ , por el contrario, si el coeficiente  $c$  es más negativo, la gráfica se trasladará hacia abajo en el eje  $Y$ . Observarán que el valor asignado para  $c$  es el valor que corta al eje  $Y$ , es decir, pasa por el eje  $Y$  en el valor que ellos indiquen a  $c$ . Este coeficiente  $c$  en la función cuadrática se le denomina “coeficiente de posición” del eje  $Y$ , puede tomar cualquier valor real, incluyendo al cero. Es decir, si  $c = 0$ , entonces la función cuadrática “pasará” por el origen del plano cartesiano, el punto  $(0,0)$ .

Estos cambios a los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  se representan en la figura 4 para las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$ .



**Figura 4: Representación de funciones cuadráticas en dispositivos móviles mediante el programa GeoGebra modificando los coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  de la figura 3:** en a) se representan las funciones originales  $f(x) = x^2 + 2x + 1$ , en color verde y  $g(x) = -2x^2 + 2x + 4$ , en color naranja, en b) se representan las funciones cuando se invierte el signo al coeficiente  $a$ , cambiando la orientación de la parábola, en c) se representan las funciones cuando se invierte el signo al coeficiente  $b$ , trasladándose a la derecha si estaba en la izquierda o a la izquierda si estaba a la derecha respectivamente, en d) se representan las funciones al cambiar el valor al coeficiente  $c$ , denominado coeficiente de posición en el eje Y, por lo tanto, el valor que se le asigne a  $c$  será entonces el valor de  $y=c$  cuando  $x=0$ .

Con el objetivo de lograr que las funciones cuadráticas puedan ser comprendidas en forma significativa por los alumnos, otorgándoles una visión más acabada de la utilidad que tienen las matemáticas y las tecnologías para la vida cotidiana y sus propios intereses, es que se indican que puedan desarrollar los siguientes ejercicios de la vida cotidiana o incluso articulados con otras materias.

### Aplicaciones

- I. En una zona del Caribe, la población del *Morceguillo*<sup>1</sup> depende del grado de humedad, según la función siguiente:

$$M(x) = -x^2 + 40x + 1200$$

Donde  $x$  viene dado en % de humedad y  $M(x)$  en miles de *Morceguillos*<sup>1</sup>.

- Representa gráficamente la función  $M(x)$
- Determina el número de *Morceguillos* cuando el grado de humedad es del 10%.
- ¿Cuál es el grado de humedad con el que la población de *Morceguillos* es máxima?
- ¿Cuál es el grado de humedad necesario para que la población de *Morceguillos* desaparezca?

Para responder a las preguntas, el docente tiene que dejar claro que los porcentajes de humedad sólo son positivos. Un porcentaje de humedad negativo no existe por lo tanto, no se considera para la vida de miles de *Morceguillos*.

En la pregunta (a), los alumnos grafican la función cuadrática en GeoGebra, donde en el eje X se representará el % de humedad, y en el eje Y la población de miles de *Morceguillos*. Como el coeficiente  $a$  es negativo, se observará una función cóncava y según su coeficiente de posición  $c$ ,  $y = 1.200$  cuando  $x = 0$ . Es decir, a un porcentaje de humedad de 0%, la población de miles de *Morceguillos* es de 1.200 o 1.200.000 *Morceguillos*. Como se representa en la figura 5a.

En la pregunta (b), los alumnos reemplazarán el valor de  $x$  por 10, y obtendrán un valor de 1.500. Entonces, la población de miles de *Morceguillos* es de 1.500.

En la pregunta (c), los alumnos utilizarán la expresión  $x = -2b/a$ , donde  $b = 40$  y  $a = -1$ . Se obtendrá el valor de 20. Por lo tanto, la población de *Morceguillos* será máxima a un 20% de grado de humedad. Ellos podrán incluso calcular exactamente la población máxima alcanzada al 20% de grado de humedad. Para lo cual, reemplazarán la  $x$  por 20 y se obtendrá el valor de 1.600 de miles de *Morceguillos*.

En la pregunta (d), los alumnos comprenden que los valores de porcentajes negativos no aplican en este ejemplo de biología. Ellos observarán de la gráfica que en dos puntos del eje X, los grados de humedad de -20% y +60%, la población de miles de *Morceguillos* será de 0, en el eje Y será  $y=0$ , por lo tanto, sólo considerarán el valor de 60% de humedad para que la población de miles de *Morceguillos* desaparezca.

---

<sup>1</sup> Murciélagos pequeños

- II. En un fundo campestre hay una napa de agua que en el verano suele secarse. De observaciones realizadas por largos años se sabe que al inicio de la disminución del rendimiento quedan aproximadamente 300 m<sup>3</sup> de agua en la napa. En este año, por días consecutivos se registró una disminución del rendimiento diario de  $e = 0,4 \text{ m}^3/\text{día}$ . El volumen momentáneo restante  $K(t)$  en la napa se representa mediante la siguiente función cuadrática:

$$K(t) = K_0 - et^2/2 .$$

- a) Representar gráficamente la función  $K(t)$
- b) Determinar el volumen momentáneo restante cuando han transcurrido 20 días.
- c) ¿En qué día se secará la napa?

Los alumnos comprenden que si al inicio hay 300 m<sup>3</sup> de agua en la napa, ese sería su máximo volumen como referencia. Es decir, sería el vértice de la parábola de la función cuadrática.

En la pregunta (a), los alumnos grafican la función cuadrática en GeoGebra. El eje X representará los días transcurridos, y el eje Y el volumen momentáneo restante. Como el coeficiente  $a$  es negativo, ellos observarán una función cóncava y según su coeficiente de posición  $c$ , que en este caso corresponde a  $K_0$ , cuando  $x = 0$  el valor del eje y es  $y = 300$ . Por tanto, que al inicio de la disminución del rendimiento quedan aproximadamente 300 m<sup>3</sup> de agua en la napa. Como se representa en la figura 5b.

En la pregunta (b), los estudiantes reemplazarán el valor de  $t$  por 20, obteniendo un valor de 220, es decir, transcurridos 20 días quedan en la napa 220 m<sup>3</sup> de agua.

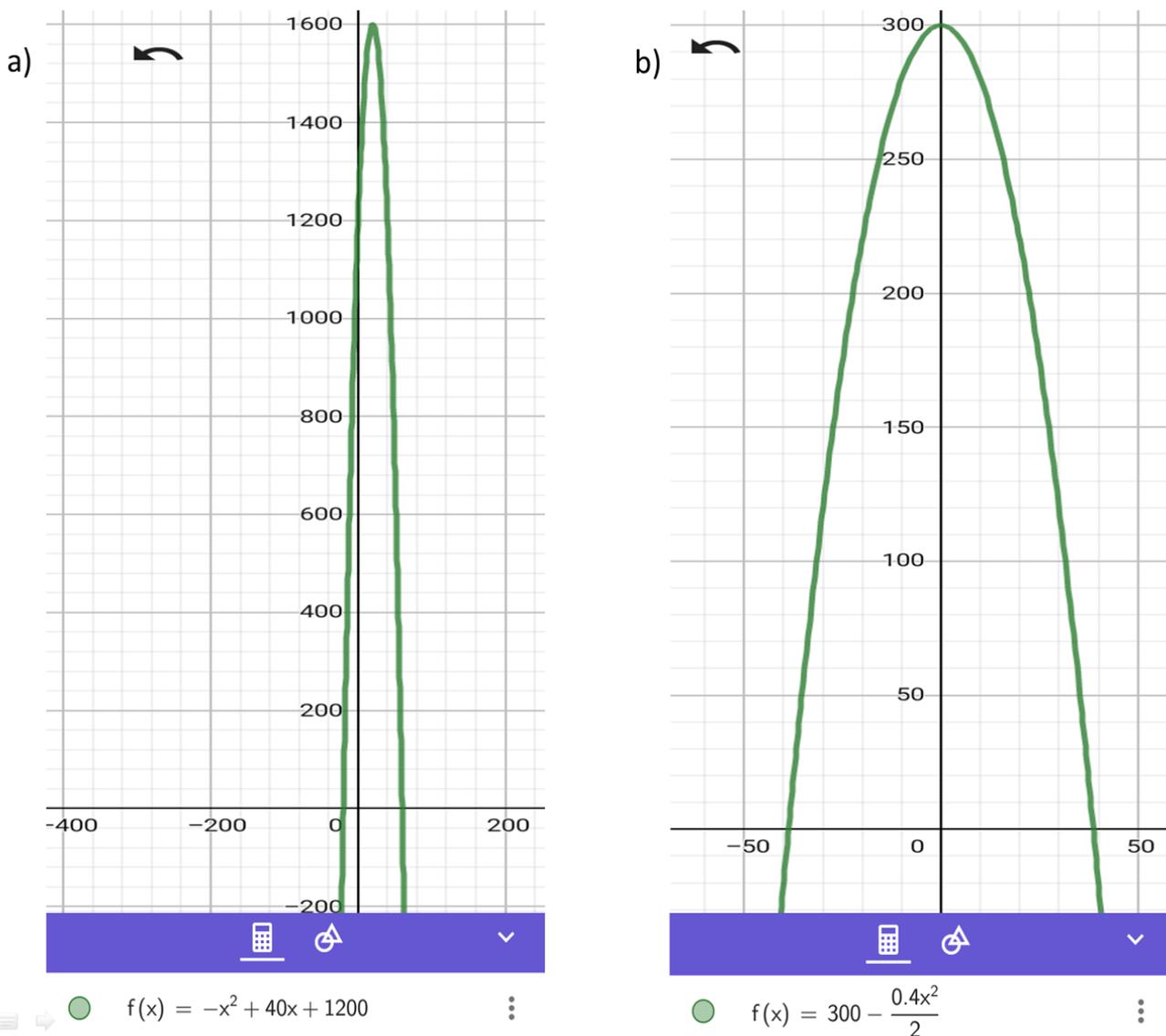
En la pregunta (c), los estudiantes nuevamente observarán de la gráfica que hay dos valores, uno negativo y otro positivo. Como son días transcurridos, sólo se considerará el valor positivo. Pero al mirar con detalle el gráfico, observarán que el valor positivo representa un decimal, sin poder determinar con esa observación el valor exacto. En este momento se les indica que existe una expresión para determinar las dos soluciones de cualquier función cuadrática, definida por la siguiente expresión, denominada “ecuación cuadrática”:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde;  $a$ ,  $b$ , y  $c$  son los coeficientes de la función original.

En este ejemplo del volumen de agua en la napa, el coeficiente  $b$  no se indica, por lo tanto, es 0. El valor del coeficiente  $c$  es 300 m<sup>3</sup> y el valor del coeficiente  $a$  es  $0,4/2 = 0,2 \text{ m}^3/\text{día}$ .

De esta forma, los estudiantes obtienen dos valores, -38,7298334621 días y +38,7298334621 o aproximado 38,73 días. Entonces, transcurridos 38,73 días desde el inicio la napa se secará.



**Figura 5: Representación de funciones cuadráticas mediante el programa GeoGebra para los ejemplos de aplicación:** En a) se representa la función  $M(x) = -x^2 + 40x + 1200$ , donde en el eje X se representara el % de humedad, y en el eje Y se representara la población de miles de *Morceguillos*, es de pendiente negativa y sus puntos de corte en el eje Y=1.200 miles de *Morceguillos*, en el eje X las soluciones son -20% y 60 % de humedad. En b) se representa la función  $K(t) = K_0 - et^2/2$ , donde en el eje X se representara los días transcurridos, y en el eje Y se representara el volumen momentáneo restante, es de pendiente negativa y sus puntos de corte en el eje Y=300 m<sup>3</sup> en la napa, en el eje X las soluciones son -38,73 y 38,73 días transcurridos.

## **11. Reflexiones finales**

Es pertinente el uso de medios tecnológicos para hacer más efectivos y preciso la comprensión de los cálculos y gráficos, para así poder analizar de mejor forma las respuestas y los significados de la función cuadrática.

Es deseable que las alumnas y los alumnos puedan buscar otras aplicaciones de la función cuadrática, como por ejemplo en el área de la salud, y para las y los que estén interesados en obras civiles, pueden analizar la construcción de puentes o de obras que tengan forma parabólica.

El buen uso de algún software o plataforma web en el sistema educacional le permite tanto al docente como al alumno, mejor optimización del tiempo, mayor cantidad de ensayo y error, más autonomía, mejor razonamiento, mayor creatividad, posibilidad de operación o trabajo a distancia, entre muchas otras ventajas.

## **12. Agradecimientos.**

A nuestras familias, por comprender el valor y el tiempo dedicado a mejorar nuestros conocimientos pedagógicos.

A nuestro orientador tutor, profesor Claudio Tapia, por inculcarnos el estudio e investigación de la didáctica en matemática y sus prácticas pedagógicas en el aula.

A la Universidad Academia Humanismo Cristiano, por permitir desarrollarnos profesionalmente.

## **13. Referencias Bibliográficas.**

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *Revista de Educación La Gaceta*, Vol. 9.1, p. 143-168.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle: Grupo de Educación Matemática.

Godino, J., Batanero, C. (1998). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En I. Vale y J. Portela (Eds.), *Actas del IX Seminario de Investigación en Educación Matemática (SIEM) de la Sociedad Portuguesa de Investigación en Educación Matemática*. Guimaraes (Portugal).

Godino, Juan D. (2004). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada. España.

Mineduc. (2009). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media Actualización 2009*. Ministerio de Educación, Chile.

Mineduc. (2009b). Programa de Estudio para 3º año medio. Educación media Formación General, primera edición 2015, Ministerio de Educación, Chile, p.75.

Mineduc. (2013). Matriz de habilidades TIC para el aprendizaje. Ministerio de Educación, Santiago, 2013.

Mineduc. (2014). Programa de Estudio III y IV Medio Matemática, Educación Media Formación General, Segunda Edición 2004, Ministerio de Educación, Chile.

Mineduc. (2017). Texto del estudiante Matemática III y IV Medio, Editorial Santillana, Segunda Edición 2014, Ministerio de Educación, Chile.

Pedró, Francesc. Aprender en el nuevo milenio: Un desafío a nuestra visión de las tecnologías y la enseñanza. OECD-CERI, mayo 2006.

Programa de Estudio de Matemáticas para 3º año medio, actualizado 2009. Educación media Formación General, primera edición 2015, Ministerio de Educación, Chile.

Silva, J., Gros B., Garrido J., Rodríguez J. (2006). Estándares en tecnologías de la información y la comunicación para la formación inicial docente: situación actual y el caso chileno. Revista Iberoamericana de Educación, Número 38(3).

Stone Wiske, Martha. (2006). La Enseñanza para la Comprensión con nuevas tecnologías. Editorial Paidós, Buenos Aires.