UNIVERSIDAD ACADEMIA DE HUMANISMO CRISTIANO

MAGÍSTER EN EDUCACIÓN

CONCEPCIONES ACERCA DEL AZAR Y LAS PROBABILIDADES, DE UN GRUPO DE PROFESORES QUE ENSEÑA MATEMÁTICA EN LOS NIVELES DE 5° A 8° BÁSICO EN UN COLEGIO DE PUENTE ALTO

Nombre alumno: Mauricio Moya Márquez

Nombre director tesis: Claudio Tapia Fuentes

Tesis para optar al grado de
Magíster en Educación Mención Didáctica e Innovación Pedagógica

Santiago, agosto de 2012

AGRADECIMIENTOS Y DEDICATORIA

Esta tesis ha sido producto de la investigación dentro del programa de Magíster en Educación, desarrollado en la Universidad Academia de Humanismo Cristiano. A través de este trabajo se indagó en las concepciones de un grupo de profesores de matemática, acerca del azar y las probabilidades, así como también en sus formas de razonamiento probabilístico. Mis sinceros ***agradecimientos****:*

- *A la Universidad Academia de Humanismo Cristiano por el Magíster cursado, el cual invita a abordar el mundo de la educación con una visión reflexiva y crítica, en vistas de concebir propuestas de innovación que impacten los diversos ámbitos educativos.*
- *A la directora del Magíster, Mirtha Abraham por su trabajo y dedicación constante, por su apoyo y preocupación para que cada estudiante pueda llegar a este momento de culminación tras un importante recorrido.*
- *Al director de la Tesis, mi gran amigo y colega Claudio Tapia, quien me ha acompañado e inspirado en todo momento con su gran experiencia y sabiduría, apoyándome en las decisiones claves de este proyecto para llegar a la anhelada meta.*
- *Al profesor Jorge Araneda por su minuciosa revisión de la Tesis, lo cual fue sin duda un gran aporte para remirar aspectos importantes de la investigación.*
- *A Miriam Pavez y Genoveva Lara por su excelente disposición y apoyo en todos los temas administrativos del Magíster.*
- *A todos los docentes del programa de Magíster, quienes nos acompañaron y entregaron nuevos aprendizajes y formas de mirar el mundo, potenciando de este modo la reflexión entre teoría y práctica.*
- *Muy especialmente a mi esposa* ***Solangela*** *y a mis hijas* ***Asmi*** *y* ***Ananda****. Por su infinita paciencia y comprensión, a pesar de este largo tiempo de trasnoches y hurto a los momentos familiares. Espero recompensarles con creces.*

- *A mi madre y hermanos, que han sido testigos de mis proyectos y logros desde la niñez.*
- *A mi padre, que ya ha trascendido el plano físico, pero quien seguirá siendo el soporte y ejemplo de voluntad para conseguir lo que uno se proponga. Especialmente por haber respetado mi decisión de incursionar en el mundo de la educación…*
- *A Edit y don Raúl, mis suegros, quienes con mucho afecto tras estos largos años me prestaron algún espacio en su casa para escribir y avanzar en esta tesis.*
- *A mis compadres Paty y Juan José y sus hijos Ángela y Darío, por acompañarnos en esta vida y ser testigos de nuestros avances, logros y alegrías.*
- *A mi padrino Omar García Ortiz, quien dejó este plano cuando yo era niño, pero a quien he aprendido a admirar y ver como un referente en educación, por medio de sus hijos. Especialmente, a través de mi querido primo, amigo y compadre, Omar García Márquez, a quien también admiro y agradezco las innumerables pláticas filosóficas y espirituales a favor de una nueva educación y un nuevo mundo. Por cierto también a mi comadre Miri y mis sobrinos Rayén y Omar Nicolás.*
- *A los directivos y coordinadores del establecimiento en Puente Alto donde se realizó la investigación, por la oportunidad brindada.*
- *A los nueve docentes que participaron (Soledad, María Elena, Verónica, Carolina, Marcelo, Gerardo, Ernesto, María José y Virginia), quienes prestaron toda su ayuda y disposición para que esta experiencia se llevara a cabo.*
- *A los compañeros de Magíster, generación 2008 - 2009, por su calidez y profesionalismo, quienes al ser de diferentes especialidades, hicieron que cada conversación se enriqueciera y los temas fuesen abordados de manera más holística.*
- *A los expertos, quienes con la mejor disposición validaron el cuestionario de ítems: Lucrecia Zamorano, Cristián Reyes, Ernesto Alabarce, Gustavo Rodríguez y Hernán Miranda.*

- *A mis colegas y amigos Fabiola, Gustavo, Ernesto y Carolina, quienes han seguido de cerca mis procesos, desde nuestro trabajo conjunto en el Ministerio - e incluso mucho antes - y que son compañía y apoyo constante, a pesar de trabajar en diferentes lugares.*
- *A mis colegas y amigos Hernán Miranda y Claudia Matus, quienes desde 1996 también me han apoyado y han seguido de cerca mis pasos en este camino y de quienes he aprendido mucho. Y por cierto, seguimos trabajando juntos…*
- *A Fidel, Gonzalo y el ex Centro Comenius, quienes me apoyaron con recursos y espacio para realizar los cursos de Magíster. Particularmente a Fidel por ser un referente en educación y de quien he aprendido montones.*
- *A una brillante alumna y amiga de la carrera de Pedagogía en Matemática y Estadística de la U.A.H.C, Valeria Pastén, por su entusiasmo y haberme apoyado con los grupos focales.*
- *A mi amiga Marta Muñoz, quien también me ayudó con los grupos focales.*
- *A las nuevas generaciones, que vienen con mucha fuerza y con quienes he tenido el placer de trabajar mano a mano: Marta Muñoz, Anahí Huencho, Kike Rocco, Alicia Venegas y tantos otros. De alguna manera me han empujado para llegar hasta aquí.*
- *A todos aquellos que directa o indirectamente permitieron que esta Tesis se concretara.*
- *Al Dios – Energía - Universo, que construye e inspira cada momento tal y como debe ser, permitiéndonos evolucionar y crecer en esta gran Escuela de la Vida. Tal como somos, visualizamos y entregamos es lo que finalmente recibimos.*

A todos muchas gracias. Este trabajo lo ***dedico*** *especialmente a mis* ***hijas*** *y a mi* ***esposa****, tres luceros que sin duda sostienen mi vida y a quienes amo…*

RESUMEN

El presente estudio se enmarca en una línea de investigación relacionada con las concepciones de profesores acerca del azar y las probabilidades. El propósito fue identificar y caracterizar aquellas concepciones y estrategias de razonamiento probabilístico, en docentes de matemática que realizan clases en los niveles de 5° a 8° básico.

El estudio fue aplicado en un colegio de la comuna de Puente Alto. Participaron nueve profesores de matemática, de los cuales cuatro eran de enseñanza básica y cinco eran de enseñanza media. Los docentes tenían cierto grado de formación inicial en estadística y probabilidades, además de algunos cursos de capacitación en el tema.

La metodología empleada ha sido esencialmente cualitativa, con un enfoque interpretativo. Para la obtención de datos se realizaron grupos focales y entrevistas en profundidad. Además se utilizó como apoyo a los grupos focales un cuestionario de preguntas abiertas sobre azar y probabilidades.

Después de recoger los datos, se realizó un análisis cualitativo categorial y de contenido. Se utilizó una metodología deductiva–inductiva, que consideró un conjunto de categorías previas, pero además se agregaron otras que surgieron del mismo estudio.

Acorde al propósito del estudio, se caracterizó y ejemplificó un conjunto de catorce concepciones acerca del azar y las probabilidades, además de seis criterios o estrategias de razonamiento. Esto permitió establecer un mapa inicial de las representaciones, imágenes y significados de los profesores en torno a estos contenidos.

Se pudo establecer que algunas concepciones favorecen más que otras a un tratamiento idóneo de la probabilidad. En contextos de juego, la aceptación del azar fue casi general, sin embargo, en contextos reales y cotidianos hubo discrepancia. Cabe destacar que los docentes en situaciones de juego se sintieron más cómodos que en el caso de contextos reales y cotidianos.

Finalmente, para los docentes no fue simple definir conceptos tales como azar, aleatoriedad o probabilidad. Los profesores básicos tendieron a un razonamiento más intuitivo, mientras que los profesores de media se esforzaron por elaborar respuestas formales. No obstante, en ambos grupos se pudo observar algunos razonamientos heurísticos y sesgos, además de cierta inseguridad en las respuestas de algunos problemas típicos planteados. En general, los profesores entrevistados expresaron espontáneamente sus preferencias por problemas algebraicos o geométricos.

Palabras claves: concepciones, azar y probabilidades, razonamiento probabilístico, formación de profesores, desarrollo profesional docente, ajustes curriculares.

ABSTRACT

This study is focused on mathematics teachers' conceptions of chance and probability. The purpose was to identify and characterize those conceptions as well as probabilistic reasoning strategies in teachers who teach mathematics from 5th to 8th grade.

The research method used was a qualitative and interpretative approach. Data were collected using focus groups and interviews. In addition, a questionnaire of open questions about chance and probability topics was handed to the participants to the focus groups.

The study was implemented in one selected school located in Puente Alto at Santiago-Chile, and involved nine mathematics teachers. Four of them were middle school teachers, and five of them were high school teachers. They had some content knowledge in statistics and probability from their initial preparation program at the university, and later by taking some teacher training courses in the same subjects.

After the data were collected, a categorical qualitative analysis was performed using a deductive–inductive method. This analysis began with a number of previous categories, but adding later other categories which emerged from the data.

According to the purpose of this study, two data set were characterized and exemplified. In first place, a set of fourteen conceptions of chance and probability was reported. In the second place, a set of six criteria about probabilistic reasoning strategies was found. Thus, this study revealed an initial map of representations, images and meanings about chance and probability contents from mathematics teachers.

As a result, this research allowed to establish that some of the teachers' conceptions are helpful to the right treatment of probability, contrarily to another teachers' conceptions reported. Teachers' acceptance of chance as ludic contexts was almost complete, although they had some discrepancies considering it as used in everyday contexts. It should be noted that mathematics teachers are more comfortable in game situations than in real and everyday contexts.

Finally, this research showed that for mathematics teachers it is not simple to define concepts such as chance, randomness and probability. Middle school teachers tended to use intuitive reasoning, while high school teachers tried to develop more formal responses. However, in both groups it was possible to see some heuristic reasoning and biases about these topics. Similarly, teachers felt unsure to answer some of the typical problems of probability proposed. In general, teachers interviewed spontaneously expressed their preferences for algebraic or geometric problems.

Keywords: teachers' conceptions, chance and probability, probabilistic reasoning, teacher training, teacher professional development, curriculum adjustments.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

> "*No puede haber innovación significativa en la educación que no tenga en su centro las actitudes de los profesores y es una ilusión pensar de otra forma. Las creencias, sentimientos y suposiciones de los profesores son la base de un ambiente de aprendizaje; son estas cosas las que determinan la calidad de vida dentro del mismo*" (Postman y Weingartner, 1971, citado en Pope y Scott, 2000, p. 179)

Edgar Morin, en su obra "Las siete leyes para la educación del futuro", planteaba sobre la necesidad de saber afrontar las incertidumbres[1]:

> *"El conocimiento es navegar en un océano de incertidumbre a través de archipiélagos de certidumbres de la situación, las probabilidades y las improbabilidades. El guión puede y debe modificarse según la información recogida, el azar, contratiempos u oportunidades con que se tropiece en el curso del camino"*

Acorde a la propuesta de Morin (1999) se puede señalar que la incertidumbre es inevitable, salvo en pequeñas dosis. La historia muestra una sucesión discontinua y no controlada de imprevistos que siguen a las acciones. Por lo tanto, las acciones más adecuadas en este entorno de incertidumbre involucran tres elementos: tomar buenas decisiones, tomar conciencia de los riesgos y la utilización de estrategias que sean adaptables al entorno cambiante.

En la actualidad la información se produce y viaja a grandes velocidades, en un mundo donde el uso masivo de la Internet es parte de lo cotidiano (Centro Comenius, 2008). En este contexto, la sociedad se caracteriza por un entorno sujeto a niveles altos de incertidumbre, donde las habilidades de analizar, interpretar y comunicar son necesarias para la vida en cuanto a la toma de decisiones en situaciones de incerteza (Azcárate, 2006). La misma autora recalca la importancia del rol que juegan la Estadística y las Probabilidades, ya que dichos conocimientos proporcionan herramientas metodológicas para analizar la variabilidad, la relación entre variables,

---

[1] Extracto desde un documento basado en Morin (1999), recuperado el 26 de enero de 2010 desde http://www.paginasprodigy.com/peimber/7saberesMorin.pdf

el diseño de estudios, o bien realizar mejores predicciones cuando el azar está de por medio.

A raíz de lo anterior, se puede apreciar cómo los niños desde pequeños se encuentran sometidos al azar, al manejo de información y la toma de decisiones (Araya, 2000; Centro Comenius, 2008). En este sentido el psicólogo alemán Gerd Gigerenzer, en una entrevista realizada por Araya (s.f.), enfatiza que las tres cosas que deben ser enseñadas a los individuos son: lectura, escritura y razonamiento estadístico. De hecho, los curricula y estándares internacionales[2] ubican tempranamente los temas de Estadística y Probabilidades. Algo similar está ocurriendo ahora en Chile, como se explica más adelante.

De otra parte, la Estadística y las Probabilidades son temas que presentan dificultades típicas a la hora de ser enseñados a nivel escolar (Araya, 2001). Araya señala que a raíz de la formación tradicional de los docentes de enseñanza media, donde el conocimiento de estos temas no ha sido sólido, por lo general, la enseñanza de la Estadística se concibe con poca o nula conexión con las Probabilidades y ésta, a su vez, no se trabaja en contextos de problemas reales. El caso de los docentes básicos es más precario aún, los que desde la reforma de los 90, solo enseñan algunas cosas de estadística[3]. Por otra parte, Romagnoli (2011) afirma que son pocas las carreras de pedagogía en matemática en nuestro país que tienen una buena formación en probabilidades.

De acuerdo con Araya (2000), quien se apoya en el trabajo de Gigerenzer, es posible señalar que las distintas interpretaciones que se le da a las probabilidades (frecuencial, clásica, subjetiva, axiomática), en su aplicación a situaciones de contextos reales, genera confusiones en los docentes. Por ejemplo, respecto al sentido o significado de la probabilidad del evento básico o aislado, o también el

[2] New South Wales, Western Australia, NCTM, British Columbia, por nombrar algunos.
3 Basta revisar los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios para Enseñanza Básica de 1996, o bien la actualización 2002.

mismo formato en que se presentan las probabilidades (porcentajes, por ejemplo). A raíz de esto último, Araya (2000) agrega que existe un desconocimiento de las capacidades innatas del ser humano para calcular probabilidades cuando están en un formato “ecológicamente válido” (frecuencias naturales, por ejemplo). Por último, Araya considera que hay poco material que muestre estrategias probadas que faciliten la introducción de estos temas, según los diferentes intereses de los estudiantes, estilos de aprendizaje, inteligencias, según edades y sexo.

Las investigaciones muestran que el razonamiento de las personas - niños y adultos - en situaciones de incerteza, es frágil, sin alcanzar niveles formales en la conceptualización (Azcárate, 2006). Es decir, existen sesgos en los razonamientos, ya que se detectan pre concepciones o concepciones implícitas y la utilización de esquemas heurísticos en sus actividades, los cuales surgen de la propia experiencia.

En los procesos de enseñanza respecto del Azar y las Probabilidades se debe reflejar la interacción entre modelo matemático y situación experimental, en los diferentes niveles de complejidad. Esta forma de instrucción propone un cambio para el docente, ya que implica una aproximación a lo estocástico desde lo empírico, lo intuitivo y lo formal (Falk y Konold, citados en Azárate, 2006)

Lo complejo en la comprensión del concepto de probabilidad, tiene que ver justamente con los diferentes significados que afectan al tipo de problemas que resuelven, la manera de asignar probabilidades, sus propiedades, los conceptos que están relacionados y la terminología empleada (Batanero, 2005).

Los docentes en nuestro país, acorde a los requerimientos curriculares[4], de lo que se ha conocido como Reforma Educacional, considerando un período desde 1996 hasta 2009, han enseñado los temas de Tratamiento de la información y Probabilidades en forma aislada y con poca profundidad. Antes del nuevo ajuste curricular, al que se

[4] Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios para la Enseñanza Básica, actualización 2002; Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios para la Enseñanza Media, actualización 2005.

hace referencia más adelante, los temas de Estadística aparecían formalmente en 6° básico, mientras las Probabilidades comenzaban recién en 2° medio.

En un estudio del Ministerio de Educación[5], relacionado con evaluaciones en aula, se demuestra que los temas sobre Estadística y Probabilidades son los menos evaluados. Se señala que, por las características del currículum de la Reforma, hay una mayor atención a Números y Operaciones en Básica, mientras que en Educación Media el eje es Álgebra. En tanto, el eje de Datos y Azar tiene una presencia más irregular a lo largo de la secuencia curricular.

A partir del año 2010 entró en vigencia el nuevo Marco Curricular, aprobado[6] por el Consejo Nacional de Educación, para los niveles de 5° básico a 1° Medio, con la implementación de los respectivos Programas de Estudio. En el sector de Matemática, una de las innovaciones corresponde justamente a la explicitación del eje de Datos y Azar que va desde primer año básico a cuarto año medio sin interrupciones. Por otro lado, se ha puesto a disposición de los docentes un Mapa de Progreso de Datos y Azar[7], el cual propone una discusión y reflexión en torno al progreso del aprendizaje de los estudiantes, las prácticas de enseñanza y la evaluación.

Por su parte, el Centro de Perfeccionamiento e Investigaciones Pedagógicas (CPEIP), con anterioridad a la puesta en marcha del nuevo currículo, trabajó en los primeros términos de referencia para las licitaciones con universidades del país, respecto a cursos de apropiación curricular para profesores de segundo ciclo básico y media. El mismo CPEIP en su modalidad *e - learning*, ha desarrollado en conjunto con algunas universidades[8] cursos virtuales de capacitación sobre Estadística y Probabilidad para profesores de 2° ciclo básico.

---

[5] Estudio realizado por el Equipo de Seguimiento a la Implementación Curricular, Unidad de Currículum y Evaluación desde el 2004. Documento de circulación interna, no publicado.
[6] Los Decretos que promulgan este ajuste curricular para la Educación Básica (Decreto N° 256) y Media (Decreto N° 254) fueron publicados en el Diario Oficial de la República de Chile con fecha 19 – 08 – 2009.
[7] http://www.mineduc.cl/index5.php?id_portal=47
[8] Un ejemplo ha sido el curso "DatosyAzar.cl" versión 2008 – 2009 en conjunto con el Centro Comenius de la USACH.

Finalmente, cabe destacar que el Ministerio de Educación, acorde a la Ley General de Enseñanza, ha estado preparando las nuevas Bases Curriculares[9] en sus versiones de 1° a 6° básico y de 7° básico a 4° Medio. Estos instrumentos reemplazarían el actual Marco Curricular, naturalmente con cambios de enfoque y contenidos. No obstante, un eje de “Datos y Probabilidades” se mantendría desde 1° básico, tal como lo hace el actual eje de “Datos y Azar” en el Marco Curricular.

En este escenario marcado por los cambios curriculares, el presente estudio cualitativo se propuso investigar acerca de las concepciones de profesores que realizan clases de matemática en los niveles de 5° a 8° básico, relativas a las nociones de azar y probabilidades. Como parte del trabajo, además interesó la reflexión sobre el impacto que dichas concepciones pueden tener en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

La presente investigación consta de cinco capítulos. En el primero se señalan los Antecedentes y Fundamentos, además del Planteamiento del Problema y la pregunta que orienta el estudio: ¿Qué concepciones acerca del azar y las probabilidades expresan profesores de matemática, que realizan clases en los niveles de 5° a 8° básico, en un colegio de la comuna de Puente Alto? Los argumentos expuestos se centran en las características del conocimiento probabilístico y sus dificultades tanto en la aplicación como en su enseñanza en aula y la necesidad de conocer las concepciones de los docentes en estos tópicos. En este mismo capítulo se proponen el objetivo general y los objetivos específicos de la investigación.

El segundo capítulo corresponde al Marco Teórico, en el cual se realizan los planteamientos teóricos y conceptualizaciones principales, los enfoques adoptados y los antecedentes sobre estudios previos. Este capítulo se inicia con una discusión acerca de concepciones y creencias, en cuanto a las diferencias, similitudes e inclusiones, en vistas de fundamentar la opción tomada para este estudio. Como parte

[9] http://www.mineduc.cl/index5.php?id_portal=47

importante de este capítulo, se propone una discusión acerca de la naturaleza del conocimiento estocástico y sus dificultades en el aprendizaje y la enseñanza. Además existen tres nociones sobre las que es necesario conceptualizar y caracterizar: azar, aleatoriedad y probabilidad. Por otro lado, se agrega un análisis acerca del concepto de formatos “ecológicamente válidos” para presentar adecuadamente los resultados de Estadística y Probabilidades. Finalmente, se describen los antecedentes respecto a investigaciones anteriores relacionadas con el razonamiento probabilístico y las concepciones en diferentes sujetos, incluyendo a estudiantes y docentes.

El tercer capítulo corresponde al Diseño Metodológico, en el cual se señala el enfoque adoptado, las unidades de análisis, las técnicas e instrumentos de recolección de los datos. Este estudio exploratorio con fines descriptivos, dentro del ámbito nacional, ha tenido fundamentalmente un enfoque cualitativo e interpretativo. Los nueve sujetos que formaron parte de la investigación, corresponden a un grupo de profesores de matemática tanto de enseñanza básica como de enseñanza media, pertenecientes a un colegio particular - con financiamiento compartido - de la comuna de Puente Alto. Para la recolección de los datos se utilizaron sesiones de grupos focales, con el apoyo de un cuestionario de ítemes abiertos y, además, entrevistas en profundidad. Cabe destacar que la triangulación realizada, respecto a la información recopilada, permitió desarrollar una mirada más amplia respecto a las concepciones de los docentes en torno al azar y las probabilidades.

En el cuarto capítulo se desarrolla el Análisis e Interpretación de los Resultados, lo cual ha sido organizado conforme a las categorías definidas para el estudio. Cabe mencionar que el conjunto de categorías lo constituyen tanto categorías empleadas en estudios previos como aquellas originales que han surgido del mismo análisis. Por último, basado en las categorías anteriores y considerando la definición de “concepción” adoptada para este estudio, se caracterizó un conjunto de concepciones acerca del azar y las probabilidades, más algunos criterios o estrategias de razonamiento que utilizan los docentes al momento de resolver problemas sobre probabilidades.

Finalmente, el quinto capítulo corresponde a las Conclusiones de este estudio. Aquí se propone una discusión final en torno a los resultados obtenidos y la respuesta a la pregunta de investigación. En este capítulo se establecen algunas comparaciones con los resultados de estudios previos, en cuanto a la forma de pensar de los docentes en contextos que involucran azar y probabilidades. Además, se hace un paralelo con las grandes concepciones acerca del azar (Discurso del Orden, Discurso de la Providencia, Discurso de la Ignorancia, Discurso del Azar/Necesidad y Discurso de la Complejidad). Por otra parte, se realizan comparaciones de las respuestas de los docentes al considerar contextos de juego versus contextos reales y cotidianos, así como también comparaciones entre estrategias de razonamiento de profesores básicos y profesores medios.

A partir de los resultados de la investigación, se establecen algunas hipótesis acerca las dificultades que podrían tener los docentes al momento de enseñar probabilidades. Del mismo modo se realizan algunos alcances en relación con los cursos de desarrollo profesional, relacionados con el azar y las probabilidades. Por último, se proponen algunas proyecciones para esta línea de investigación, así como también algunas hipótesis de las concepciones de los docentes acerca de la enseñanza y aprendizaje del azar y las probabilidades.

CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

> *El proceso de reflexión-investigación sobre la práctica puede y debe permitir al profesor el cuestionamiento sobre sus concepciones implícitas, ya que éstas constituyen la información que debe ser movilizada en un proceso de desarrollo profesional, y son el punto de partida sobre el que se deben realizar las nuevas construcciones del saber profesional* (Porlán y Martín, 1996)

1. Antecedentes y fundamentos de la investigación

Para comprender la época en que vivimos y los avances tecnológicos, vale la pena recordar el análisis que hace Morin (citado en Cardeñoso, 2001) en su momento: "*todos los avances del conocimiento nos acercan a un algo desconocido que desafía nuestros conceptos, nuestra lógica, nuestra inteligencia*" (p.43). Anteriormente ya decía: "*la complejidad aporta una nueva ignorancia. La problemática del pensamiento complejo no es eliminar sino trabajar con la paradoja, la incertidumbre y el desorden*" (Morin, 1987, citado en Cardeñoso, 2001, p.43).

En el siguiente texto, Saavedra (2005) nos recuerda el cambio desde el paradigma clásico del determinismo a un nuevo paradigma al que se enfrenta la Ciencia y el mundo, el de la Incertidumbre, frente al cual se requieren nuevas formas de interpretar la información, con cierta distancia de los conceptos usuales de causa y efecto:

> *"El llamado Principio de Causalidad del determinismo clásico ha evolucionado gracias al descubrimiento de nuevas propiedades de la materia y nos ha conducido al reemplazo de los viejos conceptos de "causa" y "efecto" por las categorías de interdependencia y de interacción mutua. (...) Causa y efecto, efecto que se transforma en causa, "líneas" causales que se entrecruzan y se determinan mutuamente, conexión universal de las formas de la materia, es la imagen que la Física descubre en forma cada vez más concreta, a medida que ella penetra en las profundidades de la materia. El Azar entonces, no hace más que expresar la determinación múltiple de cada estado que se realiza en la naturaleza. Y una experiencia aleatoria no es más que una forma particular, concreta, de interacción (...)"* (p. 149-150).

Estamos en un mundo donde se requiere analizar una cantidad de información cuantitativa exponencialmente creciente. El análisis de dicha información y el sacar conclusiones es siempre una tarea que lleva grados de incertidumbre (Miranda, 2011). El mismo autor argumenta que la probabilidad es la herramienta matemática inventada para medir la incertidumbre. Por lo tanto, Estadística y Probabilidades están íntimamente relacionados y juegan un papel muy importante para interpretar el mundo tal como lo conocemos hoy.

Es interesante recordar que el escritor de ciencia ficción H.G. Wells ya predijo en su momento que en las sociedades tecnológicas modernas el pensamiento estadístico sería tan necesario, para un desempeño eficiente de los ciudadanos, como la capacidad de leer y escribir (Gigerenzer y Edwards, 2003). Luego los mismos autores se preguntan: *"¿Hasta dónde hemos llegado, un centenar de años más tarde?"* (p. 741).

En la última década, ha aumentado el interés internacional por la investigación sobre problemas relacionados con la comprensión de tópicos de Probabilidad y Estadística (Salcedo y Mosquera, 2008). Una de las razones tiene que ver justamente con la inclusión de estos contenidos en los programas de estudio en matemática desde la educación básica. Por otro lado, está el ya mencionado creciente uso de información y de métodos cuantitativos en los diversos ámbitos de la vida humana, tales como las encuestas para comprender y tomar decisiones, por ejemplo, en situaciones electorales o económicas (Salcedo y Mosquera, 2008).

No obstante, aunque internacionalmente los curricula promuevan la enseñanza de la Estadística y las Probabilidades, desde los primeros niveles, es reconocida la falencia en los profesores respecto a estos temas en su formación inicial (Godino, Batanero y Flores, 1998, citados en Espasandin Lopes, 2004). La situación en Chile no es diferente respecto a la formación de profesores y Araya (2001) argumenta lo siguiente:

> *"En la formación tradicional de profesores y otros profesionales no se enseñaban los contenidos acerca de Probabilidades y Estadística, o, en el mejor de los casos, éstos se enseñaban muy superficialmente. A parte de algunos problemas con monedas y urnas, no se enseñaba nada más de Probabilidades; y en Estadística se enseñaba principalmente a interpretar histogramas y calcular promedios. Además, el contenido de Probabilidades se mostraba con muy poca conexión con los contenidos de Estadística"* (p.105)

Recientemente y apoyando lo anterior, Romagnoli (2011) señala que en gran parte del mundo las Probabilidades forman parte del programa de estudios, tanto en Educación Básica como en Media. Sin embargo, son pocas las carreras de Pedagogía en Matemáticas en Chile que tienen una formación sólida en Probabilidades. El autor agrega que en muchos casos existe un solo curso, incluso a veces electivo, sobre Probabilidades, que por lo general se utiliza para enseñar Estadística.

Las dificultades en la enseñanza de la Estocástica[1], tienen que ver con la propia naturaleza de este conocimiento. En particular la noción de aleatoriedad, solo puede ser definida en función de los instrumentos de los que se disponga para probar el carácter aleatorio de un fenómeno (Kyburg, 1974; citado en Azárate, 2006). Tal como Cardeñoso (2001) señala:

> *"… un grave error educativo es considerar la caracterización de la aleatoriedad como algo obvio y no dependiente de determinados criterios y reconocimiento de los elementos implicados, cuando vienen referidos a sistemas de ideas implícitos"* (p. 60).

Por su parte, la noción de probabilidad es también un concepto difícil de comprender, ya que entra en contradicción con la forma de pensar determinista o causal (Azcárate, 2006). Justamente las dificultades en la enseñanza de lo estocástico se presentan porque los profesores han sido formados fundamentalmente bajo el razonamiento determinista (Fischbein, 1990, citado en Cardeñoso, 2001).

[1] Que depende o funciona por el azar (Salcedo y Mosquera, 2008).

Respecto a la enseñanza de las probabilidades, Romagnoli (2011) argumenta:

> *"Enseñar probabilidades no puede limitarse solo a enseñar estructuras conceptuales y herramientas para la resolución de problemas. Es necesario desarrollar maneras de razonamiento y un sistema robusto de desarrollo de la intuición. El razonamiento probabilístico es diferente del lógico o del razonamiento causal. Las cosas ya no son verdades o falsas siempre y la causalidad se puede invertir (Regla de Bayes)"* (p. 19).

Acorde a lo anterior, el énfasis en los ejercicios o problemas al enseñar probabilidades, debiera centrarse en construir la intuición y no tanto en el cálculo de probabilidades (Romagnoli, 2011). Menos aún, como señala el mismo Romagnoli, centrase en problemas rebuscados que desanimen al estudiante. Para construir la intuición es recomendable pensar en el análisis de situaciones donde se enfaticen las asociaciones y disociaciones entre sus componentes y la más probable ocurrencia de desenlace.

Por otra parte, lo que debiera considerarse como una gran ventaja al enseñar probabilidades (su conexión con el mundo real) se ha transformado en un problema (Romagnoli, 2011). En lenguaje natural, expresiones tales como "independiente", "más probable" y otras tienen una interpretación que no siempre corresponde con la definición formal en el contexto de las probabilidades. *"Personalmente aprendí, con gran sufrimiento inicial y alivio final, que para un médico decir que una enfermedad es probable solo significa que no puede descartarla como posible"* (Romagnoli, 2011, p. 19).

> *"El método actual de comenzar a enseñar probabilidades, curiosamente, repite los errores históricos del desarrollo de la Teoría de Probabilidades. Se genera una confusión total entre la Combinatoria y las Probabilidades al considerar el concepto intuitivo de base de la noción de probabilidad como el cociente entre casos favorables y casos posibles. Esto no es justo para ninguna de las dos disciplinas y en el caso de probabilidades es el principal causante de la mayoría de los ejemplos contra-intuitivos y paradojas de la teoría"* (Romagnoli, 2011, p. 19-20).

La adquisición de los conocimientos básicos de Probabilidad y Estadística y su aplicación en la interpretación correcta de la información, no deja de ser un problema. Como señalan Gigerenzer y Edwards (2003), incluso los médicos con una formación de alto nivel y un promedio de 14 años de experiencia, no interpretan correctamente resultados de los test de diagnóstico médico, por ejemplo, para detectar ciertos tipos de cáncer. El problema surge cuando la representación utiliza porcentajes en lugar de las frecuencias naturales. La mente está mucho mejor preparada para comparar cantidades enteras respecto de referentes claros, en lugar de porcentajes o números decimales sin un referente (Gigerenzer y Edwards, 2003)[2]. Estos autores en su trabajo han ilustrado la manera de cómo comunicar los riesgos clínicos en formato "ecológicamente válido".

Numerosas investigaciones se han focalizado en el estudio de los sesgos y heurísticas, cuando las personas emiten juicios bajo condiciones de incertidumbre y que entran en contradicción con ciertos principios de la Estocástica (ver, por ejemplo, Kahneman, Slovic y Tverky, 1982; Shaughnessy, 1992; Serrano, Batanero y Ortiz, 1996; Batanero, Godino y Cañizares, 2005; Barragués, Guisasola y Morais, 2005; Salcedo y Mosquera, 2008). En particular, Kahneman, Slovic y Tverky (citados en Behar, 2004) señalan que en general las "pre concepciones" tienen tal arraigo, que muchas de ellas permanecen aún después de altos niveles de formación. Por otra parte, también existen líneas de investigación en torno a las concepciones y dificultades de profesores en formación y en ejercicio, relacionadas con la aleatoriedad y las probabilidades, por ejemplo, Azcárate (1995), Azcárate y Cardeñoso (1997) y Cardeñoso (2001).

Azcárate, Cardeñoso y Porlán (1998) señalan, desde su forma de entender el desarrollo profesional docente, que para provocar una evolución real del conocimiento de los profesores es necesario e "imprescindible" considerar sus concepciones como punto de partida. El rol de las concepciones iniciales de los

[2] Cabe señalar que esta afirmación implica que también es posible facilitar el aprendizaje de los estudiantes respecto a los números decimales y los porcentajes, por ejemplo, usando formatos adecuados.

sujetos es de suma importancia para lograr la comprensión de la probabilidad y su significado (Konold, 1991; citado en Azcárate et al., 1998).

> *"Las grandes dificultades detectadas en la formación de los profesores proviene de no poder modificar sus concepciones espontáneas a través de una mera aportación teórica, porque estas concepciones se caracterizan por poseer obstáculos intuitivos que han construido en la experiencia cotidiana"* (Cardeñoso, 2001, p.114).

Acorde a lo anterior, Azcárate (2006) argumenta que la investigación desarrollada en los últimos años indica que hay una relación clara entre las concepciones de los profesores y sus experiencias durante el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Las creencias están muy relacionadas con la noción de metacognición, pues constituyen el punto de vista matemático sobre uno mismo y sobre el contexto y determinan la conducta de un individuo (Schoenfeld, 1989, citado en Azcárate, 2006).

En general, la relación entre el dominio afectivo (emociones, actitudes y creencias) y el aprendizaje no va en un único sentido, ya que los afectos son uno de los condicionantes del comportamiento y la capacidad de aprender y, recíprocamente, el proceso de aprendizaje provoca reacciones afectivas (Estrada, 2002). Existe un círculo vicioso, en el que los profesores, faltos de formación, van generando actitudes negativas hacia la materia, percibiéndola como un contenido difícil que no pueden llegar a dominar. Incluso comparten concepciones erróneas y dificultades con sus estudiantes (Rubin y Rosebery, 1990; Makar y Confrey, 2004; Stohl, 2005; citados en Revista Unión, 2006).

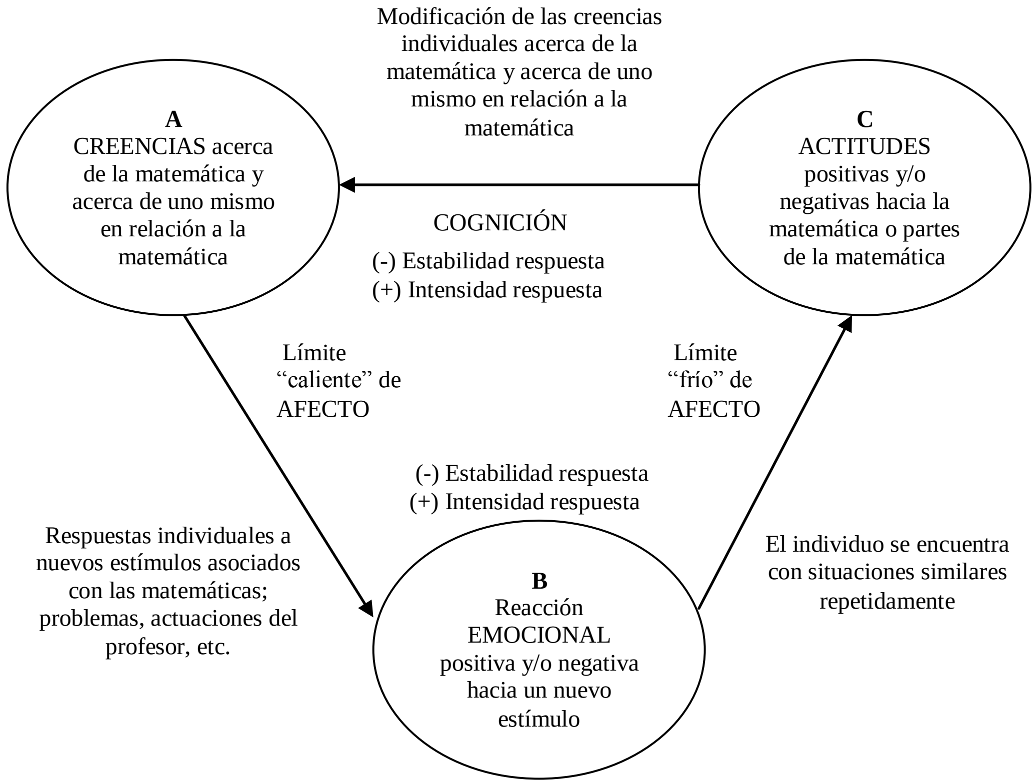


Figura 1.1: Relación entre emociones, creencias y actitudes según Estrada (2002)

A dos años de entrar en vigencia el nuevo currículo en Chile, el cual tiene una fuerte componente en Estadística y Probabilidades desde la Educación Básica, los profesores que realizan clases en segundo ciclo recién están dimensionando el impacto de este cambio en sus prácticas docentes[3]. Por lo mismo, a juicio del autor de la presente investigación, es relevante realizar estudios relacionados con las concepciones de profesores acerca del azar, las probabilidades y de su enseñanza en el aula. Cabe destacar que, a la fecha en que fue revisada la literatura, no figuran investigaciones en nuestro país específicamente relacionadas con las concepciones de los docentes respecto de los temas mencionados. Por lo mismo, esta investigación puede constituirse como referencia para futuros trabajos que indaguen sobre el significado del azar y las probabilidades en profesores de nuestro país.

[3] Esto ha podido ser constatado por el autor de la presente tesis, a partir del diálogo con los mismos profesores participantes de esta investigación y con docentes que participaron del curso virtual DatosyAzar.cl, organizado por la USACH y el CEPEIP, dictado en 2008 y 2009.

2. Formulación del problema

En acuerdo con Porlán y Martín (1996), es importante el cuestionamiento que deben realizar los profesores sobre sus concepciones implícitas, ya que éstas constituyen la información que debe ser movilizada en un proceso de desarrollo profesional, y son el punto de partida sobre el que se deben realizar las nuevas construcciones del saber profesional. En relación a la enseñanza y el aprendizaje, se puede enfatizar que:

> *"Comprender mejor cuáles son esas representaciones (concepciones) y cómo se construyen nos parece un campo de estudio muy relevante, tanto de la perspectiva teórica como desde el punto de vista de la intervención para la mejora de las prácticas educativas. La formación del profesorado, inicial y permanente, debe incidir no sólo en el conocimiento, sino también en las creencias de los docentes, en sus teorías implícitas […]"* (Pozo, Scheuer, Pérez Echeverría, Mateos, Martín y De la Cruz, 2006, p. 171)

Pareciera evidente que al introducir un nuevo tema al programa de enseñanza, sea necesario conocer si los estudiantes a los que va dirigido puedan comprenderlo. Sin embargo, a los diseñadores de currículo no les parece tan evidente la necesidad de conocer si los docentes que tienen que enseñar un cierto tema, por ejemplo probabilidades, lo comprendan adecuadamente y puedan enseñarlo bien (Azcárate et al., 1998). Y de esta manera que los estudiantes lo incorporen a su estructura cognitiva, en el lugar que corresponde y no sustentado en la memoria (lo que provoca rigidez), es indispensable. Los mismos autores señalados agregan que es imprescindible analizar las concepciones de los profesores sobre los contenidos escolares, si se quiere que su formación responda a las nuevas demandas curriculares. No obstante, es claro que los docentes además deben saber del tema, para lo cual deben capacitarse acorde a los contenidos correspondientes.

Un punto central en la formación de profesores es la reflexión epistemológica, la cual puede ayudar a la comprensión del rol de los conceptos estadísticos y otras áreas, su importancia en el aprendizaje de los estudiantes y las dificultades que éstos experimentan al resolver problemas (Batanero, Godino y Roa, 2004). Los autores agregan que la Probabilidad es un área joven dentro de la Matemática y su desarrollo formal no ha estado exento de paradojas. Esto tiene que ver con el desencuentro entre la intuición del individuo y el desarrollo conceptual en este campo (Borovcnik, Bentz y Kapadia, 1991; citados en Batanero et al., 2004).

El rol del profesor es más importante y complejo que antes, puesto que debe reconocer las creencias del alumno y ayudarlo a profundizar en ellas para que obtenga una mejor comprensión (Romagnoli, 2011). Por ello, el docente debe tener una sólida formación en la disciplina que enseña. El mismo autor complementa:

> *Un enfoque demasiado informal en probabilidades es una receta segura para el desastre. Es extremadamente fácil entregar diferentes argumentos que llevan a resultados diferentes en apariencia todos correctos. Al igual que en otras disciplinas, es un hecho que la representación que se utiliza para resolver un problema en probabilidades juega un rol fundamental, llegando incluso a transformar un problema aparentemente complejo en algo obvio. Por otro lado, el formalismo mínimo para solucionar por completo todos estos problemas es gigantesco y bastante más complejo de lo que se podría pensar* (Romagnoli, 2011, p.19).

La preparación de los docentes de matemática tiene que considerar no sólo los conceptos matemáticos involucrados en Probabilidad y Estadística, sino también las naturales barreras cognitivas a que se enfrentarán los estudiantes al mismo tiempo que aprenden. Se puede afirmar que: "*el tipo de razonamiento utilizado en Probabilidad y Estadística no siempre es intuitivo, y que los estudiantes no necesariamente lo van a desarrollar si no está incluido en el plan de estudios*" (NCTM, 2000, citado en Miranda, 2011, p. 56). Los resultados de Gigerenzer y Edwards (2003), añaden un fuerte apoyo a esta declaración.

Acorde a la experiencia del autor de la presente investigación en el desarrollo de cursos masivos de capacitación a profesores en Estadística y Probabilidades[4], por las

[4] Un ejemplo es el curso "DatosyAzar.cl" del Centro Comenius de la Universidad de Santiago de Chile. Para docentes de 2° ciclo de enseñanza básica durante los años 2008 y 2009.

características propias de estos cursos, el diseño no contempla un trabajo intencionado que requiera explicitar las concepciones de los docentes. El programa generalmente está orientado al aprendizaje y/o refuerzo de contenidos y metodologías para la enseñanza de los tópicos mencionados, acorde a los requerimientos curriculares, con el apoyo de diversos recursos.

Motivado por lo anterior y, sumándose a ello, la mencionada ausencia de estudios nacionales (a la fecha en que fue revisada la literatura), relacionados con las concepciones de profesores acerca del azar y las probabilidades, el presente estudio se propuso investigar sobre el tema considerando un grupo de docentes de matemática, pertenecientes a un mismo establecimiento y que realizan clases en los niveles de 5° a 8° básico. Cabe recordar que este conocimiento es necesario para poder abordar posteriormente el diseño de procesos de formación que favorezcan una evolución constructiva de dichas concepciones hacia formas más elaboradas (Azcárate et al., 1998).

En definitiva, las preguntas que han orientado la presente investigación se pueden enunciar como sigue:

¿Qué concepciones acerca del azar y las probabilidades expresan profesores de matemática, que realizan clases en los niveles de 5° a 8° básico, en un colegio de la comuna de Puente Alto? ¿Cómo razonan dichos docentes frente a situaciones problemáticas que involucran azar y probabilidades?

3. Objetivos

Acorde al planteamiento del problema, los objetivos formulados para la presente investigación fueron los siguientes:

3.1. Objetivo general

Develar aquellas concepciones relativas a los conceptos de azar y probabilidad, así como también los criterios o estrategias de razonamiento, utilizados frente a situaciones problemáticas que involucran dichos contenidos, en profesores que realizan clases en los niveles de 5° a 8° básico, en un colegio de la comuna de Puente Alto.

3.2. Objetivos específicos

Respecto de profesores que realizan clases de matemática en los niveles de 5° a 8° básico, en un colegio de la comuna de Puente Alto, los objetivos específicos planteados fueron:

3.2.1. Identificar y caracterizar concepciones relativas a los conceptos de azar y aleatoriedad.

3.2.2. Identificar y caracterizar concepciones relativas al concepto de probabilidad.

3.2.3. Identificar y caracterizar algunos criterios o estrategias de razonamiento, frente a situaciones problemáticas que involucren azar y probabilidades.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

> *En definitiva la idea de probabilidad es la síntesis de un conjunto de ideas que han sido desarrolladas en un proceso de siglos y que no pueden ser condensadas en una simple definición o interpretación. Su enseñanza debe reflejar tal complejidad y no restringir su comprensión o mejor su conocimiento, hacia una sola de sus vertientes* (Cardeñoso, 2001, p. 77).

1. Visión acerca del desarrollo profesional docente

En las últimas décadas la formación profesional de docentes es un tema de creciente interés en los ámbitos relacionados con la educación. Diversas investigaciones señalan que la personalidad del profesor, sus conocimientos, sus creencias y concepciones modifican el currículo y, de esta manera, se convierte en el personaje fundamental de la actividad educativa (Clark y Peterson, 1990; Houston, 1990; Thompson, 1992; citados en Azárate, 1996). Lo anterior cobra una fuerte relevancia en todo proceso de Reforma Educativa[1], al ser el docente el mediador y responsable de dicho proceso de cambio curricular. Finalmente, es la práctica del profesor la que determina el éxito de cualquier reforma educativa (Carr, 1990; Furinghetti, 1994; citados en Azcárate, 1996).

Esta investigación se sitúa en la intersección entre el campo de la educación matemática y el campo de la formación de profesores. El estudio se focaliza específicamente en el conocimiento probabilístico o “estocástico” de los docentes. Desde la mirada de esta investigación, el **conocimiento profesional** ha de tener posibilidades de evolucionar, lo cual es fundamental. El desarrollo profesional de los docentes debe ser un proceso continuo, el cual parte desde el momento que se toma la decisión de ser profesor. Por otra parte, cabe mencionar que los profesores han desarrollado un conocimiento tácito sobre la base de sus experiencias vividas en sus años escolares (Bromme, 1988; Porlán, 1989; Flores 1993; citados en Cardeñoso, 2001). Dicho bagaje se puede identificar como aquellas “concepciones” que poseen al comenzar el proceso formativo.

[1] Se destaca el proceso de ajustes curriculares que Chile lleva a cabo desde el año 2009.

Para efectos de este estudio, el **desarrollo profesional** se entenderá como "*el resultado de la confluencia de diferentes dimensiones que interactúan mutuamente, unas de carácter teórico, otras de carácter más empírico*" (Cardeñoso, 2001, p. 12). Las disciplinas científicas son parte fundamental de la "dimensión teórica" del conocimiento profesional, pero en función del objetivo de la profesión docente. La "dimensión empírica" está originada por la interiorización de las actuaciones docentes observadas y desempeñadas, constituyendo un conocimiento más de carácter inconsciente y cercano al conocimiento cotidiano y que orienta la conducta del profesor en el aula (Porlán y Martín, 1994).

El conocimiento profesionalizado sobre las matemáticas está influido por fuentes de conocimiento que originan una diversidad de opciones tales como: Filosofía, Sociología, Epistemología y Psicología. También ha de considerarse el conocimiento que proviene de las ciencias aplicadas, tales como el Conocimiento Didáctico y Curricular o la Didáctica de la Matemática. Estas reflejan un primer nivel de integración, necesario tanto para la toma de decisiones como para la planificación y la implementación de los diseños de interacción educativa.

En síntesis, el desarrollo profesional debe considerarse como un proceso centrado en el profesor como individuo en evolución, cuyo eje es la elaboración del Saber Práctico Profesional: "*un saber mediador entre la teoría y la acción, que reformula críticamente saberes, de naturaleza epistemológica diferente, a la luz de los problemas específicos de la profesión*" (Porlán y col. 1996, citado en Cardeñoso, 2001, p. 13). Es un conocimiento reconocido como un saber complejo (Morín, 1992, Martínez, 1993, citados en Cardeñoso, 2001) y de carácter práctico, no en el sentido de acción o saber - hacer inconsciente o irreflexivo, sino desde su sentido de *praxis*, es decir, es una acción reformulada y transformadora. El conocimiento profesional es interdisciplinar que integra teoría y práctica.

La postura frente al desarrollo profesional está basada, siguiendo el trabajo de autores como Porlán (1993), Azcárate (1995) y Cardeñoso (2001), según el modelo de "Investigación en la Escuela", en tres perspectivas teóricas:

- Perspectiva compleja. Supone caracterizar el conocimiento como un todo organizado y jerarquizado en un sistema de ideas (dimensión estructural), acorde a Morin (citado en Azcárate, 1996), al que se le confiere un carácter procesual y relativo que permita la evolución continua de dicho conocimiento hacia niveles más elaborados (dimensión dinámica). Los sistemas de ideas, propios de cada forma de conocimiento, están sometidos a un proceso de tipo evolutivo, abierto e irreversible, en el que lo nuevo se elabora a partir de lo viejo (García, 1994; citado en Azcárate, 1996).
- Perspectiva constructivista. El aprendizaje implica procesos mentales "reconstructivos" de las propias representaciones acerca del mundo físico, sociocultural e incluso mental (Pozo, Scheuer, Pérez Echeverría, Mateos, Martín, de la Cruz, 2006). Los individuos construyen activamente su conocimiento y los resultados obtenidos permiten desarrollar la "metacognición" que regula finalmente el aprendizaje (Azcárate, 1996; Porlán, Rivero, Martín del Pozo, 1997). Desde este punto de vista, concepciones y conductas de los sujetos pueden evolucionar a través de un proceso de reestructuración y construcción de significados, basado en la interacción y el contraste con otras experiencias e ideas que se sitúan en la "zona de desarrollo potencial"[2] de los sujetos (Porlán et al., 1997).
- Perspectiva crítica. Una perspectiva crítica de la educación, favorece una práctica social y profesional, racional, autónoma, reflexiva y no convencional, guiada por una crítica ideológica, que implica una revisión continua de las condiciones existentes como una forma de construir nuevas relaciones (Habermas, 1982; citado en Azcárate, 1996).

[2] Concepto desarrollado por Lev Vygotski

Como parte del modelo de formación de profesores, ha de considerarse la "reflexión didáctica" sobre el campo de la Matemática específico. Para este estudio, en particular, se trata del conocimiento probabilístico. Se hace necesario conocer las nociones más elementales de este campo de la matemática, ya que estas concepciones son las que hay que detectar para movilizarlas. Para un diseño de intervención como formadores, se requiere de la explicitación del **"**pensamiento previo" de los sujetos.

Las **concepciones** son la clave fundamental para comprender el funcionamiento de los profesores, antes y durante la acción educativa y poder incidir en su transformación. El docente debe concebirse como un investigador y lograr un papel más activo y comprometido en el aula (Stenhouse, 1984; 1991; citado en Azcárate, 1996). El profesor, al momento de trabajar con el alumno, debe investigar en una doble dirección: a) con el alumno sobre los contenidos, ya que el profesor no tiene todas las respuestas determinadas; b) sobre los propios procesos de enseñanza y aprendizaje, ajustando la enseñanza al aprendizaje del alumno (investigación - acción).

La investigación debe presidir la labor profesional, fundamentalmente en lo que respecta a las decisiones sobre "qué enseñar", "cómo enseñar", "qué y cómo evaluar". Esto se concibe a partir del entendimiento del diseño curricular como una hipótesis de intervención didáctica, evaluada en la práctica en forma continua.

> *La reflexión sobre la reflexión en la acción pasada puede modelar indirectamente la acción futura* (Shön, 1992; citado en Azcárate, 1996, p. 17)

El conocimiento profesional suele ser el resultado de yuxtaponer cuatro tipos de saberes (Porlán, Rivero, Martín del Pozo, 1997). Estos cuatro componentes se pueden clasificar atendiendo a una "dimensión epistemológica" (racional - experiencial) y una "dimensión psicológica" (explícito - tácito). Los cuatros saberes son:

a) Saberes académicos
b) Saberes basados en la experiencia (creencias explícitas)

c) Rutinas y guiones de acción (esquemas tácitos)
d) Teorías implícitas (se refieren más bien a un “no saber”)

Los modelos formativos en que profesores o estudiantes aprenden a cuestionar sus concepciones y prácticas, favorecen significativamente la evolución y el desarrollo profesional. El desafío es lograr que los profesores sean profesionales: autónomos, reflexivos, críticos e investigadores. Tal como señala Latorre (2003):

> *“El profesorado investigador cuestiona su enseñanza, innova, renueva, pone a prueba sus creencias, problematiza lo que hace con la finalidad de mejorar su práctica profesional. Reflexiona sobre su práctica, a veces utiliza ayuda externa, recoge datos, los analiza, plantea hipótesis de acción”.* (p. 12)

Desde una perspectiva constructivista y social de la educación matemática. La metodología de los cursos de profesores tiene que reflejar los principios metodológicos deseables en la propia acción didáctica de los docentes (Godino, Batanero y Flores, 1998). Los cursos de formación tendrían que crear las condiciones idóneas para que los profesores expliciten y comuniquen sus ideas previas en relación a su tarea profesional (Thomson, 1992; Flores, 1994; citados en Godino et al., 1998). Un punto importante en un plan de formación de profesores sobre un contenido matemático específico es la “reflexión epistemológica” sobre el mismo. Esto puede ayudarles a comprender su papel dentro de las matemáticas y otras materias, su importancia en la formación de los alumnos, así como las dificultades de los mismos en el caso de los conceptos para la resolución de problemas.

Acorde al planteamiento de esta investigación y la formación de profesores, es clave una mirada desde la postura del **profesional reflexivo**. Cabe recordar que este enfoque supone una ruptura con respecto a la “racionalidad técnica” que caracteriza el enfoque proceso-producto, y al predominio de los niveles explícitos del pensamiento de paradigma del profesor (Schön, 1983, 1987; Argyris y Schön, 1978, 1996, citados en Martín y Cervi, 2006). Schön propone una epistemología de la práctica que identifica tipos de conocimiento valiosos desde el punto de vista pragmático los que, sin embargo, no son necesariamente accesibles a la conciencia.

Todo apunta a que los modelos de formación de profesorado, deben situarse en cuatro dimensiones: “profesional reflexivo”, “constructivismo (cognitivo y social)”, “practica reflexiva”, “sistémico” (Martín y Cervi, 2006). El objetivo final de esta práctica reflexiva es sin duda el **cambio representacional**. Dicho cambio viene favorecido en la medida en la que los otros nos ayudan a tomar conciencia de nuestras propias teorías y cuestionarlas, y nos ofrecen otras posibles maneras de representarnos la misma realidad, que finalmente llevan a una reconstrucción por parte del mismo sujeto. Acorde a Vigotsky esto sería el paso del nivel interpersonal al intrapersonal. La mediación social no solo se ejerce mediante los otros, sino que además mediante herramientas culturales que ayuden a la explicitación y faciliten la toma de conciencia. (Olson, 1994; Pozo, 2001; Martí, 2003; citados en Martín y Cervi, 2006). Es importante introducir en los procesos de formación estos instrumentos epistémicos.

2. Desde las concepciones y creencias a las teorías implícitas sobre la enseñanza y el aprendizaje

2.1. Discusión sobre concepciones y creencias

> *“Se supone que la calidad instruccional depende tanto de las creencias del profesor, como de sus conocimientos y de su nivel de experticia en general. Se supone además que las características personales de los profesores tienen efecto sobre los resultados de los alumnos, pero que este efecto es indirecto, influenciando las percepciones de los alumnos. Por este motivo se realiza una combinación de evidencia empírica: preguntas a los profesores por sus creencias y análisis de su conducta por medio de codificación de videos”* (Varas, 2008, p.11).

A partir del texto anterior se quiere enfatizar el impacto de las creencias de los profesores y su conocimiento en la calidad de su instrucción con los estudiantes, al momento de enseñar un tópico específico. En este caso la autora se refiere a las “creencias”, sin embargo, en otros trabajos se encuentra comúnmente el término “concepciones”. A continuación se propone una discusión en torno a creencias y concepciones, según distintos autores.

El término **concepciones** se encuentra asociado fuertemente al de **creencias** y, en este sentido, la primera tarea para los investigadores es justamente aclarar el significado de ambos términos y sus eventuales diferencias. Al revisar la literatura no hay un consenso acerca del significado de concepción y creencia (Moreano, Asmad, Cruz y Cuglievan, 2008; Pérez y Guillén, 2007; Mora y Barrantes, 2008; De Faria Campos, 2008; Parra, 2005; Flores, 1998; Dodera, Burroni, Lázaro y Piacentini, 2008).

Reforzando lo anterior, Pajares (citado en Moreano et al., 2008) señala que establecer una definición clara para cada término es una tarea compleja. No obstante, el mismo autor destaca los componentes cognitivo, afectivo y conductual en el caso de la creencia. Por otra parte Dodera et al. (2008), apoyándose en Thompson (1992), señala que la diferencia está en que las concepciones están compuestas de creencias y otras representaciones, sin embargo, señala que en otros contextos se las trata como sinónimos. Se reconoce que entre los términos: conocimiento, creencias y concepciones existen sutiles diferencias (Llinares, 1991, citado en Dodera et al., 2008).

Profundizando en el tema, las creencias son ideas generales o específicas, que forman parte del conocimiento que posee la persona (docente o alumno) y que influyen de manera directa en su desempeño (García, Azcárate y Moreno, 2006). Cabe destacar que un individuo no siempre es consciente de sus creencias, además éstas pueden cambiar con el tiempo. Por otra parte las creencias, además del componente cognitivo, tienen un componente afectivo (Goldin, 2002; citado en Mora y Barrantes, 2008). El mismo autor se refiere a las estructuras o sistemas de creencias como un conjunto donde éstas se refuerzan y apoyan mutuamente, son primordialmente cognitivas, pero también incorporan lo afectivo.

Las creencias "*son las verdades personales indiscutibles sustentadas por cada uno, derivadas de la experiencia o de la fantasía, que tienen un fuerte componente evaluativo y afectivo*" (Pajares, 1992, citado en Pérez y Guillén, 2007, p.297). Por su parte, los mismos autores señalan que las concepciones "*son los marcos organizadores implícitos de conceptos, con naturaleza esencialmente cognitiva y que condicionan la forma en que afrontamos las tareas*" (Ponte, 1994, citado en Pérez y Guillén, 2007, p.297). Tanto las concepciones como las creencias tienen un componente cognitivo, sin embargo, la distinción entre ambas es que las concepciones son mantenidas con convicción, son consensuadas y tienen procedimientos para valorar su validez, en tanto que las creencias no cumplen estas condiciones (Thompson, 1992; Pajares, 1992; citados en Pérez y Guillén, 2007).

Rescatando la diferencia entre concepciones y creencias, Ponte (citado en De Faria Campos, 2008) argumenta:

> *"… las concepciones son un constructo más general que puede ser usado para estudiar aspectos en los que la persona no parece sostener creencias sólidas y agrega que la mayoría de los autores ven las creencias como una carga afectiva importante relacionada con preferencias, inclinaciones y líneas de acción. Así, las creencias pueden mostrar aspectos afectivos de la personalidad del profesor* (p.11)".

Existe un consenso acerca de que la formación de creencias y concepciones se originan y modifican en la experiencia, así como también en la observación directa, en la información recibida, y también pueden ser inferidas desde otras creencias y en la influencia de una persona respetable para el sujeto. Las creencias tienen un carácter dinámico, una vez que éstas se adquieren se van construyendo y transformando en el tiempo (Callejo y Villa, 2003; Pajares, 1992; citados en Moreano et al. 2008). Por otra parte, las creencias tienen un rol adaptativo, es decir, los docentes pueden ajustarse de la mejor manera a una situación determinada. Cada individuo utiliza pensamientos estratégicos para seleccionar las herramientas cognitivas que le permitirán resolver un determinado problema, siendo aquí donde intervienen las creencias.

Conocer las concepciones y creencias del profesor, considerado como un profesional reflexivo que toma decisiones, permite comprender sus actitudes y posiciones (Gil Cuadra, 2003; citado en Dodera et al., 2008). En este sentido, cada profesor da una respuesta personal a las situaciones que ocurren en el aula, aún cuando es consciente de que debe ajustarse a los requerimientos curriculares y a las normas del establecimiento educativo.

En otro contexto, cabe señalar que Flores (1998) realiza un planteamiento desde el paradigma de investigación que se interesa por el "pensamiento del profesor". El autor señala que los seguidores de esta corriente tratan de describir las representaciones cognitivas que el profesor hace de su tarea, la forma en que estas representaciones repercuten en la actuación del alumno, y estudian la relación que existe entre las representaciones y actuaciones del profesor y los alumnos. Entonces, según este paradigma se toman en cuenta las concepciones y creencias de los profesores, por ejemplo, sobre las matemáticas, el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, como los aspectos en los que se basa la conducta del profesor.

Finalmente, no se puede dejar de señalar que de acuerdo a la Teoría del Significado de Godino y Batanero (citado en Flores, 1998), por creencias y concepciones se entenderá a los significados que atribuyen los estudiantes a las matemáticas, así como a su enseñanza y aprendizaje. En este sentido estas concepciones y creencias no son directamente observables, ya que corresponden a un nivel de información profundo, muchas veces inconsciente, no siempre accesible al sujeto investigado.

2.2. Concepciones de los docentes

Esta investigación se referirá con mayor propiedad a las concepciones de los docentes, opción que se expresa ya en el título de este estudio, y se aceptará su carácter más inclusivo y general respecto de las creencias. Respecto al término concepciones, interesa enfatizar los siguientes aspectos:

- **Lo que incluyen**: *"una estructura mental de carácter más general, que incluye creencias, conceptos, significados, reglas, imágenes mentales y preferencias, conscientes o inconscientes"* (Thompson, 1992; citado en Azcárate, Cardeñoso y Porlán, 1998, p. 86).

- **Lo que condicionan**: "*son los marcos organizadores implícitos de conceptos, con naturaleza esencialmente cognitiva y que condicionan la forma en que afrontamos las tareas*" (Ponte, 1994; citado en Pérez y Guillén, 2007, p. 297).

- **El origen:** *"... es el sistema organizado de creencias…, entendidas éstas como las aseveraciones y relaciones que el individuo toma como ciertas en cada momento determinado de su vida, que se originan y desarrollan a través de las experiencias e interacciones"* (Remesal, 2006; citado en Moreano et al., 2008, p. 3).

A partir de los aspectos que señalan los autores anteriores, y como una síntesis, se construye – para efectos de esta investigación - la siguiente definición de lo que se entenderá entonces por "concepción" de un docente:

"Una estructura general de pensamiento que incluye significados, conceptos, imágenes mentales, preferencias, reglas y creencias del profesor, tanto globalmente como sobre un determinado tópico, que condicionan la forma en que afrontan las tareas de la enseñanza. Estas se originan y desarrollan a través de las experiencias e interacciones con la realidad".

En las siguientes figuras se refleja, acorde a la definición adoptada, las dimensiones que constituyen una concepción y la manera en qué ésta se origina y lo que finalmente condiciona en el actuar de los docentes.

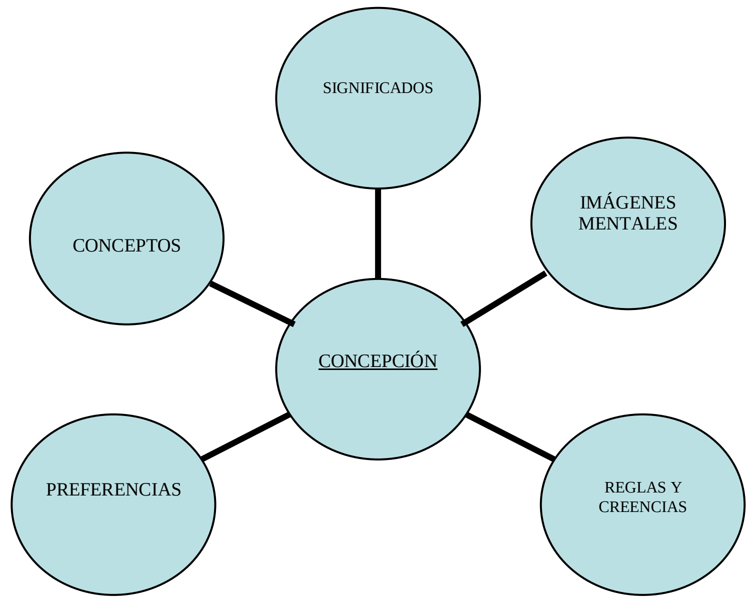


Figura 2.1: Dimensiones de una concepción según la definición adoptada.

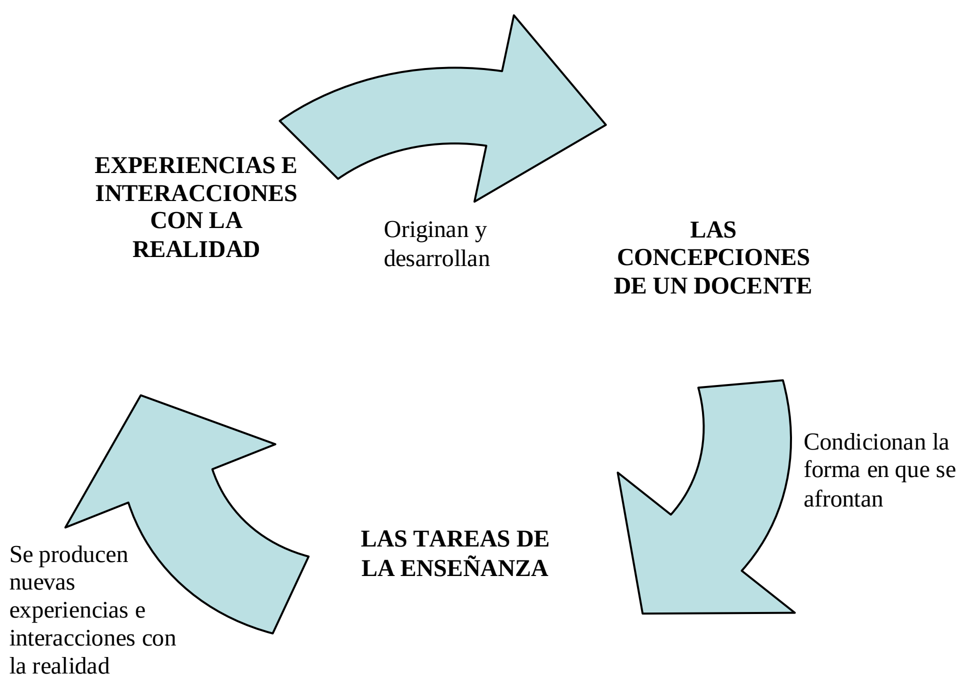


Figura 2.2: El origen de las concepciones y lo que condicionan.

En palabras de Porlán y Martín (1996), la caracterización de la dinámica de la clase, responde a la manera de conceptualizar la realidad que tiene cada profesor, a sus propias ideas y puntos de vista. Las concepciones no solo determinan la manera de ver la realidad, sino que guían y orientan la actuación en el aula. En la misma obra, los autores señalan que el contenido de estas concepciones hace referencia a los aspectos claves de cualquier contexto educativo:

a) Concepciones referidas al alumno
b) Concepciones referidas al papel del profesor
c) Concepciones referidas a la materia o contenido
d) Concepciones referidas al ambiente

Según Porlán y Martín (1996), aunque puede existir una gran diversidad de concepciones o puntos de vista, se pueden establecer grandes patrones comunes o Modelos Didácticos debido a la relativa coherencia interna que guardan entre si las concepciones. Por ejemplo, una cierta forma de concebir el aprendizaje de los estudiantes tiene cierta relación con la visión del papel del profesor o de las relaciones sociales en clases.

> *"Otra característica de las concepciones también es su resistencia al cambio. Muchas de ellas se han ido elaborando a lo largo de nuestro proceso de socialización profesional en el sistema educativo a través de la percepción, muchas veces inconsciente, de regularidades y evidencias aparentes; por lo que poseen un alto nivel explicativo y funcional"* (Porlán y Martín, 1996, p.35).

Profundizando en el tema en un trabajo de Porlán et al. (1997), acerca del conocimiento profesional de los profesores, se plantea la existencia de un tipo de concepciones especiales para favorecer la transición de lo "simple a lo complejo". Los autores las denominan "concepciones sobre las concepciones", o en otras palabras, el "conocimiento sobre el conocimiento" (Porlán, 1993; citado en Porlán et al., 1997). El grado de complejidad de las ideas en relación con la naturaleza del conocimiento, de su forma de organización y cambio, y del papel que puede jugar en el conjunto del sistema de "metaideas", este grado de complejidad, puede favorecer a los procesos de generalización, transferencias e integración entre ámbitos parciales del conocimiento personal, en uno mismo y otros. De aquí el interés por estudiar las concepciones "epistemológicas" de los profesores.

2.3. Teorías implícitas

Ya se ha mencionado que las concepciones de los docentes, por ejemplo, incluyen una serie de elementos como las mismas creencias de éstos, que condicionan la forma de enfrentar sus tareas y que se originan y desarrollan a través de la experiencia e interacciones con los demás en las diferentes situaciones. Luego interesa hablar de un conjunto o sistema de concepciones, relacionadas entre sí, que aparecen cada vez que el individuo (docente) enfrenta una situación (una clase). Se trata de hablar ahora más que de concepciones aisladas de un conjunto relacionado, de un entramado, de lo que algunos autores denominan las "teorías implícitas" (Porlán et al., 1997; Pozo et al., 2006).

De otra parte, las teorías implícitas son derivadas de un enfoque psicológico de investigación (Groeben et al., 1988; citado en Eichler, 2006). Las teorías implícitas son definidas como un complejo sistema de cogniciones (un complejo sistema de creencias), las cuales contienen al menos racionalidad implícita.

Pozo et al. (2006) nos dan más luces acerca de las llamadas teorías implícitas. Su estudio va desde la comprensión acerca de las concepciones y creencias, hasta la definición de estas teorías. Los autores señalan que las concepciones sobre el aprendizaje y la enseñanza, son una herencia cultural, un producto de la manera en que se organizan las actividades de enseñanza y aprendizaje en nuestra tradición cultural.

Los mismos autores señalan que estas creencias o concepciones, que se "heredan sin testamento", y de las que frecuentemente no se es consciente, proporcionan a los individuos representaciones bastante eficaces acerca del mundo físico y social (Pozo, 2001; citado en Pozo et al., 2006). Dichas creencias están en el origen de las llamadas concepciones previas de los estudiantes, las que tienen que ver con el aprendizaje y la enseñanza de las materias específicas. Pero no solo proporcionan creencias o concepciones acerca de dichas materias, sino además sobre el propio conocimiento y sobre el proceso mediante el que se adquiere.

Se tienen creencias o teorías asumidas profundamente, quizás nunca puestas en discusión, sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje, que rigen las acciones del docente y que constituyen un "currículo oculto" que dirige la práctica educativa. Es en este terreno donde se puede hablar de las llamadas "teorías implícitas", teorías propias que poseen tanto profesores como alumnos acerca de lo que es enseñar y aprender (Pozo et al., 2006). No obstante, esas teorías o creencias implícitas, o bien "intuitivas" acorde a los términos de Atkinson y Claxton (citados en Pozo et al., 2006), que son muy efectivas en la vida cotidiana, pero resultan inadecuadas al momento de enfrentar problemas culturales nuevos.

La capacidad "metarrepresentacional", es decir, de representarse sus propias representaciones, es un rasgo específicamente humano. Corresponde a una herencia natural, constituye una identidad cognitiva "primordial" del *homo sapiens sapiens*[3]. "Solo las mentes capaces de saber lo que saben y lo que otros saben (o ignoran) pueden guiar su propio aprendizaje y, aún más, el de los demás" (Pozo et al., 2006, p.35).

En este contexto solo tomando conciencia de lo que uno sabe es posible proponerse enseñarlo, por otro lado, solo sabiendo lo que otra persona no sabe es posible

[3] Hombre que sabe que sabe.

proponerse enseñarle. La capacidad de conocer las propias representaciones es la que hace posible que se desarrolle una teoría de la mente, una psicología intuitiva que atribuye a la conducta ciertos estados y procesos mentales tales como: intenciones, emociones, además de conocimientos y representaciones, según D'Andrade (citado en Pozo et al., 2006), las que originarían las diferentes teorías implícitas sobre el aprendizaje culturalmente adquiridas. "*Entendemos las teorías implícitas como un conjunto de principios que restringen tanto nuestra forma de afrontar como de interpretar o atender las distintas situaciones de enseñanza – aprendizaje a las que nos enfrentamos*" (Pozo et al., 2006, p.79)

3. La naturaleza del conocimiento estocástico y sus dificultades en el aprendizaje y la enseñanza

3.1. Un primer acercamiento al razonamiento estocástico, sesgos y heurísticas

Como parte de la presente investigación, una de las nociones que interesa estudiar corresponde a la aleatoriedad, pero ¿cuál es su significado? A continuación Batanero (2001) argumenta:

> *"La aleatoriedad es un modelo matemático que permite describir un gran número de fenómenos en forma más adecuada que otros modelos deterministas. A partir de dos ideas muy simples: repetibilidad de la situación en las mismas condiciones e independencia de resultados en dos repeticiones, surgen una serie de modelos de complejidad progresiva, que permiten resolver problemas de inferencia y de predicción en presencia de incertidumbre. Estas dos ideas son, en sí mismas, una simplificación de la realidad y pueden ser más o menos aceptables en cada problema particular"* (p.1).

Por otra parte, aparecen los conceptos de probabilidad, modelo y simulación. ¿Cómo se relacionan entre ellos? Batanero (2001) señala lo siguiente:

> *"La probabilidad es un campo donde los modelos simples se componen entre si de una forma muy potente partiendo de unas pocas ideas estocásticas fundamentales. Aún así,*

la matemática de la probabilidad es muy compleja, más allá de unos pocos desarrollos elementales y sus resultados son bastante contraintuitivos. La simulación o sustitución de un experimento aleatorio por otro equivalente, como modelo pseudo-concreto de la situación modelizada, permite prescindir del aparato matemático para analizar situaciones estocásticas. Como recurso didáctico, puede ayudar a comprender la diferencia entre modelo y realidad y a mejorar las intuiciones sobre la aleatoriedad. Como contrapartida, la simulación no nos proporciona justificaciones ni demostraciones, que debemos buscar de nuevo en el modelo matemático" (p.1).

El azar está presente en la vida cotidiana en muchas situaciones en las que figura la incertidumbre, el riesgo y las probabilidades (Batanero, 2006). Por ejemplo, señala la autora, el pronóstico del tiempo, un diagnóstico médico, un seguro de vida, etc. Cualquier individuo reacciona a dichos elementos, tomando decisiones, emitiendo juicios acerca de la relación entre eventos o realizando inferencias y predicciones (Gigerenzer, 2002). El punto es que en estos contextos la probabilidad no es una propiedad "física tangible", por lo mismo objetiva de los sucesos o eventos, sino más bien un grado de creencia o una "percepción" acerca de la posibilidad de que ocurran dichos sucesos (Batanero, 2006). En el siguiente cuadro, se caracterizan los diferentes significados de la probabilidad:

Cuadro 2.1: Significados de la probabilidad según Batanero (2006).

Significado	Problemas Analizados	Procedimientos de asignación	Lenguaje	Definiciones y propiedades	Conceptos relacionados
Intuitivo	Sorteos Adivinación	Manipulación de generadores de azar: dados, cartas, etc.	Lenguaje ordinario	Opinión impredecible, creencia	Suerte Destino
Clásica	Cálculo de esperanzas o riesgos en juegos de azar	Combinatoria Proporciones Análisis a priori de la estructura del experimento	Triángulo aritmético Listados de sucesos Fórmulas combinatorias	Cociente entre casos favorables y posibles Equiprobabilidad de sucesos simples	Esperanza Equitatividad Independencia
Frecuencial	Estimación de parámetros en poblaciones	Registro de datos estadísticos a	Tablas y gráficos estadísticos	Límite de las frecuencias relativas	Frecuencia relativa

		posteriori Ajuste de curvas matemáticas Análisis matemático Simulación	Curvas de densidad Tablas de números aleatorios Tablas de distribuciones	Carácter objetivo basado en la evidencia empírica	Universo Variable aleatoria Distribución de probabilidad
Subjetiva	Mejora del conocimiento sobre sucesos inciertos, incluso no repetibles	Teorema de Bayes Asignación subjetiva de probabilidades	Expresión de la probabilidad condicional	Carácter subjetivo Revisable con la experiencia	Probabilidad condicional Distribuciones a priori y a posteriori
Axiomática	Cuantificar la incertidumbre de resultados en experimentos aleatorios abstractos	Teoría de conjuntos Álgebra de conjuntos Teoría de la medida	Lenguaje conjuntista	Función medible	Espacio muestral Espacio de probabilidad Conjuntos de Borel

Lo complejo en la comprensión del concepto de probabilidad, tiene que ver justamente con los diferentes significados que afectan al tipo de problemas que resuelven, la manera de asignar probabilidades, sus propiedades, los conceptos que están relacionados y la terminología empleada (Batanero, 2005). En este sentido el significado matemático – axiomático es un significado “estructural”, que responde a una problemática de organización y estructuración (formalización) de los demás significados más arriba mencionados. No obstante, en la realidad estos significados aparecen mezclados en la misma situación.

Cuando una persona (joven o adulta) toma una decisión y efectúa un juicio o una predicción, entonces este problema es “abierto” o tiene más de una posible decisión y en la solución intervienen tanto factores matemáticos como extra matemáticos (Batanero, 2006). Entre ellos, por ejemplo, se encuentra una decisión posiblemente útil, que por lo general no coincide con lo esperado. En el caso de los juegos de lotería u otros juegos de azar, la actividad se explica porque la utilidad de una posible ganancia (pero muy improbable), por una buena apuesta, es mayor que la utilidad de una pequeña ganancia (pero muy probable).

Cuando se toman decisiones y se emiten juicios de probabilidad, en la vida cotidiana, es fácil dejarse llevar por la intuición o "sentido común", lo que habitualmente hace cometer errores que no son simples de corregir con un aprendizaje formal del concepto de probabilidad (Shaughnessy, 1986, citado en Batanero, 2006).

Las investigaciones sobre la intuición en los individuos acerca del azar y las probabilidades, tienen una larga tradición en las áreas de Psicología y Didáctica (Borovcnik y Bentz, 1991; Scholz, 1991; citados en Barragués, Guisasola y Morais, 2005). Desde los trabajos de Piaget e Inhelder, allá por los años cincuenta, los psicólogos han descrito acerca del razonamiento en probabilidades y elaborado teorías que relacionan su desarrollo con las etapas de maduración de un individuo. Posteriormente otros psicólogos han llevado a cabo esta tradición (Fischbein, 1975; Kahneman, Slovic y Tversky, 1982; Stanovich, 1986; citados en Salcedo y Mosquera, 2008).

Los investigadores en didáctica de la Estocástica han llevado a cabo su trabajo en una estrecha relación tanto con especialistas en Estadística como en Psicología, los que se han interesado por el estudio del pensamiento probabilístico (Salcedo y Mosquera, 2008). En este contexto, varios investigadores se han centrado en el tema del "sesgo" (Shaughnessy, 1992; Serrano, Batanero y Ortiz, 1996). Cabe mencionar que mucho antes, los estudios de Kahneman y Tversky (citados en Salcedo y Mosquera, 2008) han sido muy influyentes en este tema. Uno de los propósitos de las investigaciones en Estocástica ha sido buscar información acerca de la manera en que las personas emiten juicios probabilísticos. Muchos de estos juicios están orientados por la sistematización de unos pocos patrones de inferencia conocidos (Kahneman et al., 1982, citado en Barragués et al., 2005). Los patrones (heurísticas y sesgos) más frecuentes que aparecen cuando un individuo desea medir la verosimilitud de un suceso son los de "disponibilidad o accesibilidad", "representatividad" y “equiprobabilidad” (Scholz, 1991; Muñoz, 1998; Sáenz, 1998; Serrano et al., 1996 y 1998; citados en Barragués et al., 2005).

3.1.1. Heurística de accesibilidad o disponibilidad

Esta heurística ha sido descrita inicialmente por los psicólogos Kahneman y Tversky (citados en Barragués et al., 2005). Consiste en estimar la probabilidad de un suceso acorde a la facilidad con que se recuerdan algunos ejemplos en los que el mencionado suceso ha ocurrido antes, o bien por la facilidad con que pueden generarse ejemplos en los que tal suceso ocurre (Scholz, 1991; Hirsch y O´ Donnell, 2001; Sáenz, 1998; citados en Barragués et al., 2005). La literatura en Psicología contiene una gran cantidad de estudios sobre este error de accesibilidad o disponibilidad, por lo que se convierte en un fenómeno ampliamente difundido (Paulos, 1995; citado en Barragués et al., 2005). Por ejemplo, si una persona visita por primera vez un restaurante y recibe un mal servicio, podría pensar que ese lugar es malo y no recomendable. Sin embargo, un cliente habitual, a quien siempre le han atendido bien, si en una oportunidad también recibe un mal servicio, no pensará lo mismo (Kahneman y Tversky, 1974; citados en Salcedo y Mosquera, 2008).

3.1.2. Heurística de representatividad

Kahneman y Tversky (citados en Salcedo y Mosquera, 2008) han explorado lo que ellos mismos han denominado “heurística de representatividad”. En este caso se estima la probabilidad de un suceso según lo representativo que para cierta población parece ser dicho suceso (Hirsch y O´ Donnell, 2001; Sáenz, 1998; Serrano et al., 1998; citados en Barragués et al., 2005). Esto corresponde a asignar probabilidades altas a los sucesos que parecen ser “prototípicos” de una población y bajas probabilidades a los que no parecen serlo. En palabras de Kahneman y Tversky:

> *Una persona que sigue este patrón evalúa la probabilidad de un suceso o una muestra según el grado en que cuenta con propiedades similares a las de la población de donde*

> *proviene, y refleja las características del proceso mediante el cual ha sido generado*" (Barragués et al., 2005, p.59).

Esta heurística también explica la creencia de que las secuencias de resultados que parecen ser simétricas u ordenadas no pueden considerarse aleatorias (Serrano et al., 1998; citado en Barragués et al., 2005). Por ejemplo, se consideraría poco probable un número de algún juego de azar o lotería como 123456, ya que no sería representativo de un conjunto de resultados que se obtienen al azar.

3.1.3. Heurística de equiprobabilidad

Este sesgo tiene que ver con la creencia de las personas en que todos los sucesos, respecto de cualquier experimento aleatorio, son equiprobables incluso donde no es aplicable el principio de indiferencia. En algunos estudios, respecto al lanzamiento de dos dados, se preguntó a los sujetos sobre qué era más probable, obtener un seis y un cinco u obtener dos seis. A pesar de variar el contexto, la edad y la formación de los sujetos, la creencia de que son equiprobables tiene gran estabilidad (Lecoutre, 1985 y 1992; Lecoutre y Durand, 1988; Lecoutre y Cordier, 1990, citados en Barragués et al., 2005)

3.1.4. Intuición y conocimiento normativo

Hay que destacar el nivel de importancia que tienen estas investigaciones para el contexto pedagógico, debido a que pueden orientar y ayudar a los docentes en las dificultades que tienen los estudiantes para comprender las probabilidades. Las intuiciones de los individuos sobre el azar y la manera de estimar la verosimilitud de un evento son, por lo general, vagas y confusas (Barragués et al., 2005). A modo de ejemplo, los autores señalan proposiciones tales como las siguientes: “probablemente lloverá mañana”, “la serie 1, 2, 3, 4, 5 y 6 no puede resultar ganadora en la lotería”, etc. Es algo difícil operar con esas intuiciones poco firmes, muy diferentes a las que tienen que ver, por ejemplo, con números naturales. Claramente, es posible presentar a un individuo (alumno) el fundamento axiomático de la probabilidad, a través de la cual se puede justificar la existencia matemática de los conceptos y las propiedades asociadas. Sin embargo, dicho fundamento no da claridad de cómo asignar probabilidades a los eventos (Barragués et al., 2005).

De este modo, el “sentido común” y las intuiciones que provienen del conocimiento formal pueden entrar en conflicto. Las intuiciones probabilísticas de sentido común forman una representación mental consistente que puede impedir o sesgar la aplicación de los conceptos correctos acerca del azar (Pozo, 1999; citado en Barragués et al., 2005).

3.2. Tres nociones: azar, aleatoriedad y probabilidad

3.2.1. La noción de azar

Son bastantes y variados los análisis filosóficos y didácticos de la noción de azar y la relación de ésta con la aleatoriedad (Serradó, Cardeñoso y Azcárate, 2005). Por ejemplo, es posible citar los estudios de Cardeñoso (2001), Azcárate (1995) o Bennett (citado en Serradó et al., 2005). Con el fin de clarificar el significado de la noción de azar, se puede señalar el paso por diferentes etapas significativas, en las cuales se buscaban distintas maneras de explicar los fenómenos “indeterminados” (Azcárate, 1995). Según esta misma autora, la interpretación de estos sucesos extraños o inciertos varía según cuál sea el discurso dominante: del orden, la necesidad, la Providencia, la ignorancia o de la complejidad.

Como característica de las primeras civilizaciones, considerando el “discurso del Orden”, el azar se ha entendido fundamentalmente como aquella causa desconocida. Aquello que permite la ocurrencia de eventos inesperados o bien “extraños”, y que se asocia al desorden inicial o “caos” que procede de las fuerzas incontroladas de origen mágico o divino (Serradó et al., 2005). Dentro de las interpretaciones, el conocimiento de la incertidumbre pasa por utilizar diversos “aleatorizadores” para interpretar los designios divinos de forma iniciática, mientras que los mismos instrumentos son utilizados en forma profana para los juegos de azar (Cardeñoso, 2001). Se puede considerar decisivo que el valor del orden en la Naturaleza, tomado como característica intrínseca a ella, es el causante de la ignorancia de la incertidumbre, considerando el azar como fuerza mágica o divina asociada, en muchos casos, a la existencia del caos (Morin, 1986; citado en Cardeñoso, 2001).

El "discurso del azar/necesidad", que ya impera en la época grecorromana, donde se explica que el azar sigue siendo algo desconocido, propone además que puede ser explicado como un "cruce inesperado" de un conjunto de sucesos que son producto de causas independientes. Esto tiene que ver con la existencia de sucesos fortuitos que se escapan al orden o a la aparente necesidad absoluta, bajo la que funciona la Naturaleza (Grimal, 1989; citado en Cardeñoso, 2001). El mismo autor señala que se mantiene el uso de ciertos instrumentos para el juego o para predecir el futuro, la fortuna y la suerte personal, pero sin la influencia directa de los fenómenos naturales. En el mundo lúdico, desde la antigüedad, se utilizan aleatorizadores equilibrados y desequilibrados, quedando restos de tales objetos en culturas tan dispares como la egipcia, indú, china, desde tiempos inmemoriales (Cardeñoso, 2001).

Cabe mencionar que en los escritos de Cicerón (106 – 43 a. C.) hay un primer intento de conexión entre la adivinación por mecanismos aleatorios y el juego usando aleatorizadores, donde aparecen manifestaciones sobre la probabilidad y el azar, cercanas a la actual concepción de dichas nociones (Davis, 1962; citado en Cardeñoso, 2001). El autor continúa que Cicerón reafirma la idea de considerar el azar como un accidente con Aristóteles, pero sin restringir su definición a los eventos raros o extraños propios del mundo terrenal. Hay que recordar que para Aristóteles el azar es una mera apariencia que atañe a las cosas de la naturaleza y las humanas, nunca a las celestes, ya que estas pertenecen a otra categoría (mundo supralunar), donde no existe indeterminación alguna (Taton, 1972; Mason, 1985; citados en Cardeñoso, 2001).

En otros momentos de las historia, la incertidumbre ha sido explicada a partir del poder de la “Providencia”, la cual siempre ha garantizado el orden y armonía en el Universo. El azar es atribuido a la voluntad de la Divina Providencia, de modo que se transforma en un hecho inexplicable para el ser humano. Cabe destacar que esta concepción se mantiene hasta el día de hoy (Serradó et al., 2005).

A raíz de la natural separación entre explicaciones científicas y religiosas de los fenómenos, hace su aparición un nuevo discurso del Azar, el llamado “Discurso de la ignorancia”. Bajo esta visión, el azar era simplemente el producto de la ignorancia al momento de realizar un análisis científico de algún acontecimiento de la Naturaleza, a la luz de leyes de causalidad y deterministas. Según el nuevo discurso, el azar realmente no existe sino que es la ignorancia del ser humano lo que hace invocarlo una vez más (Serradó et al., 2005). Citando a Hacking: “a ninguno se le ocurriría pensar ni por un instante que las leyes del azar podrían suministrar una alternativa de las leyes estrictamente causales” (Cardeñoso, 2001, p.40). Las leyes del azar no eran consideradas y simplemente se buscan maneras de controlar lo desconocido. Es una consideración ligada a la opción filosófica dominante durante los años posteriores, la formulación de las leyes de la Mecánica Clásica y el triunfo del Determinismo (Cardeñoso, 2001).

Los primeros intentos de estudios sistemáticos de fenómenos naturales afectados con ciertos grados de incertidumbre se asocian a Paracelso, el cual inició la recolección de datos de las llamadas ciencias bajas, cuyos signos se basaban en evidencias empíricas (Hacking, 1995; citado en Cardeñoso, 2001). Esta postura se basa en la consideración de que las decisiones divinas hablan a través de los signos. Sin embargo, la progresiva disponibilidad de datos referidos a poblaciones de nacimientos, defunciones y casamientos, dio origen a las primeras caracterizaciones del comportamiento de lo que hoy se llama fenómenos aleatorios y a la determinación de sus propiedades (Cardeñoso, 2001).

Las bases para considerar la incertidumbre en el mundo de la naturaleza, se sientan a partir del momento en que surge la aproximación de Fisher a la experimentación y la aproximación paralela de Neyman al muestreo (Fiemberg, 1992; citado en Cardeñoso, 2001). Se introduce entonces una probabilidad basada en un mecanismo aleatorio, tal como una “tabla de números aleatorios”. Esta probabilidad introducida externamente no es parte del estado de la naturaleza, sino que se usa para hacer inferencias, a partir del experimento o el muestreo de una población.

Ante la enorme variedad de acontecimientos socio-naturales, los cuales no podían ser explicados desde leyes deterministas, el mundo científico comienza a plantear la reelaboración del concepto de “fenómeno fortuito” (Cardeñoso, 2001). De esta manera, orden y caos, determinismo y probabilidades se juntan y complementan, en un mundo que resulta más complejo y rico que la visión fría del mecanicismo y cuyo comportamiento, se sigue de la acción íntimamente ligada del azar y necesidad.

Son los esfuerzos de Poincaré, dirigidos a una búsqueda en donde el azar tuviese un mayor significado que la ignorancia humana, los que sientan las bases de una nueva mirada (Serradó et al., 2005). El desarrollo de teorías como la Mecánica Cuántica, la Mecánica Estadística y la moderna Ciencia del Caos, han confirmado tal aseveración, llevando al mundo científico hacia la búsqueda de relaciones lógicas, superadoras de la lógica clásica (Cardeñoso, 2001). Poincaré describe tres tipos de eventos, cuyo comportamiento se atribuye al azar:

a) Aquellos sucesos que son producidos por causas insignificantes, que se escapan a la percepción humana, sin embargo, producen un efecto considerable.
b) Aquellos eventos donde la importancia no radica en la pequeñez de las causas, sino más bien en lo complejo de las interacciones entre ellas.
c) Se refiere a la limitación de los seres humanos para describir a todas las partes del universo, de modo que la forma de proceder es un razonamiento aislado,

considerando solo aquellos aspectos que están implicados en forma directa (Cardeñoso, 2001).

A partir del reconocimiento de dichas categorizaciones del azar, es posible conformar un último "Discurso de la Complejidad". Tal como analiza Morin: "*todos los avances del conocimiento nos acercan a un algo desconocido que desafía nuestros conceptos, nuestra lógica, nuestra inteligencia*" (Cardeñoso, 2001, p.43). El mismo Morin agrega: "*la complejidad aporta una nueva ignorancia. La problemática del pensamiento complejo no es eliminar sino trabajar con la paradoja, la incertidumbre y el desorden*" (Cardeñoso, 2001, p. 43). De esta manera el azar queda caracterizado como aquel elemento que provoca la complejidad que existe en la realidad, de modo que el significado de "azar" tiene un carácter más bien ontológico (Serradó et al., 2005).

3.2.2. La noción de aleatoriedad

La aleatoriedad en sí misma es un concepto complejo. Ayton, Hunt y Wright (citados en Serradó et al., 2005) describen una variedad de criterios que son usados por los sujetos para decidir si una secuencia es aleatoria o no. Es importante para el análisis expuesto señalar tal como lo hace Cardeñoso (2001, p. 60): *"... un grave error educativo es considerar la caracterización de la aleatoriedad como algo obvio y no dependiente de determinados criterios y reconocimiento de los elementos implicados, cuando vienen referidos a sistemas de ideas implícitos*."

Una vez planteadas las ideas de Kolmogorov, en la década de los cincuenta, y el desarrollo de la Teoría de la Integración y la Teoría de la Medida, es Kyburg, en los setenta, quien determina la noción de aleatoriedad independientemente de la probabilidad (Cardeñoso, 2001). Kyburg caracteriza la noción de aleatoriedad a partir de cuatro elementos que operan independientemente. Estos son:

a) El objeto de estudio. Un acontecimiento al cual hay que enmarcar en uno u otro fenómeno o proposición para su interpretación probabilista. Sus caracterizaciones como acontecimiento que sucede de tal forma desordenada como para que se le considere miembro del conjunto de solicitudes posibles de un cierto fenómeno.
b) El conjunto que lo acoge. Una tipología de fenómenos que se reconocen como productores de acontecimientos aleatorios. Esta consideración puede dar lugar a los modelos que se conocen como aleatorizadores físicos en un principio y luego, a que cualquier situación social o natural, adecuadamente formulada, se puede convertir en un aleatorizador natural, para finalmente construir aleatorizadores telemáticos.
c) La proposición que determina dicha pertenencia. El criterio síntesis de reconocimiento, expresado como propiedades o condiciones que han de cumplirse, para que el acontecimiento sea miembro del conjunto y se pueda realizar el cálculo de las probabilidades. Son dichas hipótesis las que dan credibilidad a la afirmación cuantitativa, expresada por la probabilidad de un suceso.
d) Un cuerpo de conocimiento como referente. Se refiere al sistema de ideas que soporta la información, ilumina y da sentido a los otros tres elementos, el cual es fruto de la significación epistemológica del azar subyacente en cada sistema.

3.2.2.1. El objeto como posible miembro de una clase o conjunto de referencia

El objeto de estudio, que es el acontecimiento que hay que enmarcar en el estudio e interpretación probabilística, ha tenido una evolución histórica, dependiendo de las diferentes concepciones sobre la probabilidad (Serradó et al., 2005). Cabe señalar que en un primer periodo histórico se consideran como objetos los acontecimientos lúdicos. En un segundo periodo, los objetos corresponden a los acontecimientos naturales que despiertan el interés de la comunidad científica. Esto es lo que facilita la perspectiva empirista desde la que se evidencian estadísticamente las regularidades en los fenómenos de la naturaleza y la sociedad (Cardeñoso, 2001). En un tercer periodo, los objetos son aquellos acontecimientos de la vida cotidiana de orden social, como situaciones a estudiar y modelizar.

Para poder caracterizar adecuadamente el acontecimiento como aleatorio, es necesario conocer una “referencia de conjunto” o clase de la cual es miembro el objeto o acontecimiento aleatorio. Dicho de otra forma, es necesario caracterizar el tipo de fenómeno del que proviene. Se entiende que son diversos los potenciales fenómenos que pueden encuadrar al evento en cuestión, situación que ocurre siempre que se encuentre pertinente la presencia del acontecimiento planteado, en el conjunto de soluciones posibles de cada fenómeno en particular. Dado que la referencia puede hacerse a una tipología variada de fenómenos, es posible tipificarlos en los múltiples modelos conocidos por el hombre como “aleatorizadores” (Cardeñoso, 2001).

Los aleatorizadores o generadores de secuencia de sucesos aleatorios, es posible encontrarlos a lo largo de la historia como una amplia tipología de carácter físico. Este criterio posteriormente se expandió, apoyándose en la idea de ley universal mecanicista, al conjunto de datos producidos por situaciones de carácter social o natural. El fenómeno físico-natural se puede convertir en un segundo tipo de aleatorizador natural, para la producción de una secuencia de eventos. Acorde al espíritu experimentalista, se elaboraron tablas de “números aleatorios”, inicialmente originados por datos descontextualizados de las fechas de nacimientos o defunciones, los cuales fueron sensiblemente mejorados en la primera mitad del siglo XX. En el presente se puede considerar a los ordenadores o computadores como una tercera tipología de productores de secuencias aleatorias, dado los avances informáticos que han permitido construir aleatorizadores con un mayor rigor cada vez para producir secuencias pseudo-aleatorias de datos.

En los primeros momentos del estudio de los fenómenos aleatorios, el interés estaba focalizado en situaciones de juego, situaciones generadas por aparatos y artilugios.

Estos se pueden clasificar en función de lo físico (taba o astrágalo, dado, monedas, ruleta, naipes, loterías, urna, etc.) y de su caracterización geométrica (dianas, spinner, ruletas, superficies reticuladas, etc.). Esto origina diferentes problemas de carácter teórico-probabilista, como por ejemplo, el problema que plantea Buffon en 1777 sobre el lanzamiento de una aguja o el problema de la cuerda de Bertrand (Cardeñoso, 2001).

Es difícil construir artilugios que posean características suficientes para garantizar su perfecta aleatoriedad. Respecto a la aleatoriedad física es posible establecer si ciertas observaciones aleatorias son el resultado de perturbaciones impuestas sobre determinadas conductas del sistema, ocultando su regularidad, conductas predecibles, o si hay alguna aleatoriedad inherente al sistema, la cual no puede ser eliminada (Humphereys, 1976, citado en Cardeñoso, 2001). Tal como plantea Bennett (citado en Cardeñoso, 2001), en la línea de pensamiento determinista, ¿si todas las condiciones iniciales fueran conocidas, sería aleatorio el lanzamiento de una moneda?

El estudio de los resultados de este tipo de situaciones ha dado origen a las primeras modelizaciones o caracterizaciones de fenómenos aleatorios. Sin embargo, algunos autores mantienen su postura de que lo aleatorio es simplemente aquello que no está de acuerdo con ninguna ley y, por lo tanto, no podría ser modelizado como tal (Benett, 1993; Hacking, 1995; citados en Cardeñoso, 2001).

Un salto significativo en el estudio de la aleatoriedad, ocurre cuando se consideran otros tipos de fenómenos distintos a los producidos por una entidad con soporte físico. Aquellos aleatorizadores de carácter socio-natural, donde la naturaleza es una productora de eventos aleatorios. En este caso se concreta la expresión del devenir natural, a través de la simulación y de las tablas de números aleatorios. La primera tabla de números aleatorios está asociada a Tippett en 1975, otras a Fisher y Yates en 1938, Kendall y Babbington-Smith en 1939 o la corporación RAND en 1955 (Benett, 1993; citado en Cardeñoso, 2001).

Acorde a lo anterior surge la definición "práctica" de aleatoriedad: una secuencia es aleatoria en virtud de cuántos y cuáles tests estadísticos satisface. Tippett propone un conjunto de datos como tabla de números aleatorios, construida con 40.000 dígitos tomados aleatoriamente desde los dígitos centrales de las fechas que llenan los censos parroquiales, aunque nunca describió qué procedimiento había utilizado (Tippett, 1968; citado en Cardeñoso, 2001). Su reconocimiento como tal fue adquirido por su validez antes las sucesivas aplicaciones y la comprobación a través de los tests estadísticos disponibles. Los primeros estadísticos asumían directamente que sus datos podían ser considerados como muestras aleatorias, siempre y cuando fueran tomadas de una cierta manera usando la tabla de números aleatorios.

Los estudios de fenómenos de tipo social y natural originaron otra tipología de modelización estadística, relacionados por ejemplo: con simuladores de tipo de campana de Gauss para el estudio de los errores, distribución de Poisson para la dispersión de tiro, tabla de Galton para la herencia, etc. Progresivamente se convirtieron en modelos que diferenciaban a los productores de ciertas distribuciones aleatorias y al mismo tiempo usados en pruebas o test de aleatoriedad (Cardeñoso, 2001).

Acorde a la generación computacional, estos son generadores de series de números pseudo-aleatorios, basados en una fórmula computacional, con origen en la teoría de la información algorítmica, cuya primera aportación es de 1940 (Chaitin, 1990; citado en Cardeñoso, 2001). Posteriormente, aparecen los algoritmos de von Neumann en 1951, Lehmer en 1949, Park y Miller de 1988, o el generador de Marsaglia y Zaman en 1991 (Cardeñoso, 2001). Desde la perspectiva computacional, una secuencia aleatoria es comúnmente percibida como aquella que no aparenta un orden particular. En la discusión de si existe o no la aleatoriedad absoluta, parte de la problemática es el reencuentro de la noción científica con la noción común de desorden, no obstante, autores como Kirschenmann piensan que es imposible lograr una definición formal de aleatoriedad en términos de desorden (Bennett, 1993; citado en Cardeñoso, 2001).

Suena paradójico el que se generen secuencias aleatorias a través de ecuaciones algebraicas, por una conexión compleja con la lógica. Chaitin y Kolmogorov, en la década de 1960, independientemente plantean que una secuencia aleatoria es definida como aquella que requiere una máxima complejidad en su descripción (Cardeñoso, 2001). La definición moderna de secuencia aleatoria desde el punto de vista de complejidad ha sido un intento de cuantificar el "desorden", según el cual una secuencia es aleatoria acorde a la longitud del algoritmo necesario para describirla.

En otros campos de las matemáticas, las modelizaciones producen una primera representación del problema real, consiguiendo más datos en el proceso de ajuste y reorganización del modelo, para hacerlo más apto a la realidad (Borovcnick, 1996; citado en Cardeñoso, 2001). Este modelo simple, no surge respecto a los conceptos básicos de probabilidad porque tienen características que desafían tal reciprocidad directa.

Fisher (citado por Cardeñoso, 2001), se apoya en material informático y los nuevos aleatorizadores para dar más atención a la potencialidad visual y representacional en la educación del conocimiento matemático, acorde a la facilidad con que un ordenador puede realizar la tarea. Varios trabajos realizados consideran la herramienta informática interesante para la introducción comprensiva del conocimiento probabilístico. Por otra parte, cabe señalar que "*las urnas y los spinners pueden llegar a ser modelos cognitivos que pueden usarse como un primer paso para la modelización. Una traducción a representaciones de modelos más abstractos puede ser utilizada, dependiendo del nivel educativo"* (Borovcnick y Peard, 1996, citados en Cardeñoso, 2001, p. 52).

Es obvio que ni el acontecimiento azaroso, ni la clase de pertenencia tienen un sentido aislado, siendo su interconexión la que dirige el cuestionamiento intencional en la resolución de problemas de carácter probabilístico (Cardeñoso, 2001). El paralelismo entre la evolución histórica del significado de los objetos aleatorios, y la capacidad del sujeto en discriminarlos como tales, sugiere una posible relación entre los obstáculos epistemológicos en la identificación de los fenómenos (aleatorios), y los obstáculos ontogénicos asociados a la capacidad de clasificar del sujeto (Serradó et al., 2005).

3.2.2.2. La propiedad que determina la pertenencia del objeto a la clase aleatoria

A partir de una doble vertiente de reflexión, física y epistémica, se diversifica para dar lugar a soluciones de carácter "apriorístico", cuando se trata de un objeto que es originado por un aleatorizador equilibrado, es decir, "equiposible" (Cardeñoso, 2001). Por otro lado, desde la otra óptica se aporta la solución "a posteriori", ya que se basa en juzgar si la serie en cuestión es aleatoria, a través de la superación del test al uso o bien, logrando niveles suficientes en su sentido de complejidad, definida como la longitud del programa de cálculo necesario para generar la secuencia.

La primera condición que aparece en la historia para considerar a las situaciones aleatorias como objeto de estudio, es la de contar con resultados "equiposibles" (Cardeñoso, 2001). Esta idea implica otra condición, generalmente obviada por evidente, la que tiene que ver con disponer de un inventario finito de eventos que puedan suceder o no suceder, conocidos "a priori". De esta manera, acorde a los primeros objetos estudiados, en los juegos de azar, en donde el tema debatido era si los aleatorizadores poseen equilibrio y simetría, como condición necesaria para ser abordado desde la doctrina del azar.

El criterio que permite decidir respecto a la equiprobabilidad en fenómenos simples, está apoyado sobre el "principio de indiferencia" o razón insuficiente, la cual se basa en la idea de la falta de razones suficientes para esperar uno u otro suceso. De hecho, tanto Leibniz como Laplace en su definición de la medida de probabilidad, hablan de casos igualmente posibles. En el siglo XX se ha mantenido la equiposibilidad como una característica fundamental de los sucesos aleatorios, ya que su enfoque filosófico defiende la imposibilidad de producir definiciones no circulares (Hacking, 1995; citado en Cardeñoso, 2001).

Esta cuestión toma relevancia cuando se tratan los casos relacionados con “sucesos compuestos”, considerando la necesidad de descomponerlos en sucesos elementales para su estudio. En varias investigaciones se ha detectado la supremacía de la idea de equiposibilidad como característica de los sucesos aleatorios, tanto simples como compuestos (Lecountre y Duran, 1988; citados en Cardeñoso, 2001).

Otra consideración que ha originado varias disputas entre diferentes autores, está relacionada con la dependencia o independencia de los sucesos considerados como equiprobables. Un ejemplo clásico es la disputa mantenida entre Laplace y D’Alembert, en torno a la idea de independencia de los sucesos en la situación de lograr una bola blanca en dos extracciones, sin reemplazamiento, de una urna con dos bolas blancas y dos bolas negras (Falk, 1983; citado en Cardeñoso, 2001). Gran parte del origen de la controversia estaba en un factor de incomunicación en torno a la propia idea de independencia, origen de un sinnúmero de paradojas.

La condición de equiposibilidad era requerida en el Renacimiento para seleccionar las situaciones aleatorias, además de exigir la finitud de opciones posibles (Cardeñoso, 2001). Su extensión a una tipología de fenómenos naturales, con la elaboración de estadísticas y la construcción de tablas de números aleatorios, como aleatorizador o simulador de una situación físico-natural, reafirman la condición de repetibilidad independiente, como característica los fenómenos a estudiar. Con ello se admite la independencia en la potencial obtención de los datos de la serie, cuestión que no es siempre admitida y que realmente plantea una diversificación en los presupuestos teóricos, originando escuelas como la Bayesiana que, en su afán de utilizar toda la información disponible, no entra a considerar dicha hipótesis (Cardeñoso, 2001).

A pesar de que tanto en la perspectiva lógica como en la empírica, en la base de la detección de situaciones aleatorias se encuentra la hipótesis de independencia, en el primer caso considerando a los eventos como simples y en el otro de manera implícita, es un conocimiento no abordable directamente en la enseñanza y aprendizaje de las probabilidades. Borovcnick y Peard plantean: "*el concepto de independencia, se reduce matemáticamente a la fórmula de multiplicación y llega a ser el ingrediente básico de teoremas sobre experimentaciones repetidas, como la ley de los grandes números o el teorema central del límite*" (Cardeñoso, 2001, p.59). La independencia representa un papel importante dentro de la teoría, sin embargo, su definición matemática puede no afectar el origen de las ideas de los sujetos y su relación con lo general, ya que nuevamente se trata de una noción probabilística que requiere experiencia y reflexión para comprenderla.

Como ya se ha mencionado, en el último momento del estudio de la incertidumbre, se sitúa el reconocimiento de los sucesos aleatorios como algo intrínseco a la naturaleza y producto de una complejidad causal de su funcionamiento no regular, lo cual les impregna de la característica más universal: la imprevisibilidad (Cardeñoso, 2001). Poincaré, entre los siglos XIX y XX sentó las bases para la consideración de los sucesos aleatorios como algo más que el producto de nuestra ignorancia.

3.2.3. La noción de probabilidad

Son varios los autores que han analizado aquellos obstáculos epistemológicos, asociados a la construcción de la noción de probabilidad (Hacking, 1975, citado en Serradó et al., 2005). Acorde al trabajo de Azcárate (1995), se pueden analizan cuatro etapas en su construcción. En una primera etapa del desarrollo de la idea, que puede reconocerse como la Prehistoria, donde la noción de probabilidad surge asociada a la noción de juegos de azar, cabe mencionar que fue el matemático Cardano uno de los primeros en realizar un argumento teórico para calcular las posibilidades de los distintos resultados relacionados con los juegos de dados. En forma paralela surgieron ideas intuitivas relacionadas con el "grado de posibilidad", con algunos cálculos de frecuencias teóricas, sin tener consideración del cuerpo de conocimientos (Serradó et al., 2005).

En una segunda etapa de “iniciación al cálculo de probabilidades”, comienza un estudio sistemático, también a partir de la aplicación al estudio de situaciones de juego en contextos empíricos (Serradó et al., 2005). Cabe mencionar que en los textos de historia, este hecho aparece como la primera sistematización del cálculo de probabilidades de los sucesos, acorde a los aportes de Pascal y Fermat, estableciendo claramente vínculos con la combinatoria.

A partir de los aportes de Bernoulli, los cálculos probabilísticos comienzan a adquirir una mayor consistencia. El mencionado autor, al estudiar el desorden aparente que mostraban los resultados en las situaciones de juego, se percató de ciertas regularidades, lo que le permitió demostrar el teorema que actualmente se conoce como la “Primera ley de los Grandes Números”. La comprensión incorrecta del significado de la estabilidad de las frecuencias, común en los adultos, se refleja en una transferencia de dicha ley a muestras pequeñas, esperando que se cumpla con un número limitado de pruebas (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982). Dicho razonamiento se basa en la creencia de que el azar funciona como un mecanismo auto-correctivo en el que una desviación en una dirección es rápidamente equilibrada por una desviación en la dirección contraria (Falk y Konold, 1992; Bennett, 2000; citados en Cardeñoso, 2001). Esta consideración incorrecta supone un obstáculo epistemológico y ontogénico que dificulta la comprensión de la noción de probabilidad.

En una tercera etapa aparecen dos perspectivas diferenciadas. Una primera perspectiva, la frecuencial, que atenderá el estudio de las frecuencias relativas, y otra, la bayesiana, que se presentará más relacionada con los grados de credibilidad y sus necesarios ajustes con la realidad (Serradó et al., 2005). Y una última etapa, correspondiente a la introducción de una “Teoría Axiomática”, la construcción de la medida se realiza con independencia de la interpretación real a la que se preste cada situación, aportando un soporte axiomático – deductivo a la teoría matemática (Kolmogorov, 1950, citado en Serradó et al., 2005). Se entra en la fase de asimilación de los avances teóricos y el posterior desarrollo de aplicaciones. El análisis de la evolución histórica del cálculo de probabilidades ha permitido identificar los obstáculos que se han superado hasta convertirse en ciencia, así como la dificultad de caracterizar las nociones de azar, aleatoriedad y probabilidad.

3.2.3.1. Aspecto comparativo

La característica cuantitativa de la probabilidad, acorde a lo encontrado en situaciones humanas, se establece en dos etapas: una comparativa y otra cuantitativa (Piaget e Inhelder, 1951; citado en Cardeñoso, 2001). En la evolución de cualquier concepto métrico en la historia de la Ciencia, se puede distinguir el aspecto comparativo como el comienzo de la cuantificación (Taton, 1972; citado en Cardeñoso, 2001). En conclusión, primero se presenta la idea cualitativa y luego la exposición de una métrica.

La idea central es analizar las diferentes estrategias o formas de comparación de determinados fenómenos, referidos a un acontecimiento reconocido como aleatorio (Cardeñoso, 2001). Para establecer la comparación, el primer elemento corresponde a la colección de resultados de la clase o “espacio muestral” donde se va a estudiar el acontecimiento. Este espacio muestral puede ser explícito o inherente al aleatorizador que lo produce. La complejidad de este espacio muestral se debe tener en cuenta, ya que se puede contar con aquél más simple de carácter dicotómico hasta aquél con múltiples opciones.

Las estrategias de recuento van a ser imprescindibles para la posterior comparación. Estas parten desde el simple inventario, bien por análisis de las simetrías del aleatorizador, bien por observación de la ocurrencia de acontecimientos diferenciados respecto del mismo fenómeno (Cardeñoso, 2001). La complejidad del recuento está relacionada con la complejidad del aleatorizador. Si éste se trata de un objeto, su manipulación cognitiva será más asequible y cercana al individuo que si es de carácter hipotético o modelizable por estructuras más complejas (Cardeñoso, 2001).

Acorde a Piaget e Inhelder, en la etapa de operaciones concretas el tema del inventario está relacionado con dos casos: aditivo y combinatorio (Cardeñoso, 2001). Para el caso de sucesos simples por mera enumeración y en los múltiples, por diferentes argumentos que involucran combinatoria, con independencia de la representación que se utilice (combinatoria, arbórea, cartesiana, etc.). Para el caso de los eventos compuestos, el asunto involucra la conversión a eventos simples, lo que se convierte en la justificación para la necesidad de razonamiento combinatorio. El recuento del espacio muestral puede requerir de la elección de una entre las diferentes formas para obtenerlo: particiones, combinaciones, variaciones, permutaciones, etc.

A modo de ejemplo se pueden establecer otro tipo de comparaciones que han surgido a lo largo de la historia. En términos de la teoría de la decisión, la idea de riesgo que se está dispuesto a aceptar a la hora de realizar una afirmación o tomar una determinación (Lindley, 1977, citado en Cardeñoso, 2001). Dicho riesgo es el logro para el cual hay que desarrollar una diversidad de estrategias que permite la comparación del nivel de incertidumbre entre situaciones diversas, para optar por una de ellas en función del riesgo que se ha de asumir.

Una forma especial de comparación entre fenómenos es a través de las expectativas de Huygens, predecesor del valor esperado (Cardeñoso, 2001). En su libro de probabilidades "Calculando en juegos de azar de Huygens", en 1657, el autor usa la idea de expectativa en lugar de la probabilidad como concepto básico y se refiere al "valor de una acción incierta". En palabras de Hacking: "*pero Huygens no estaba tratando de justificar la esperanza; trataba de justificar un método para evaluar las jugadas, que resulta de ser lo mismo que hace lo que ahora llamamos esperanza matemática*" (Cardeñoso, 2001, p. 64). Su enfoque hizo de la esperanza matemática un concepto más básico que la probabilidad. La equidad del juego surge de la comparación que relaciona la apuesta justa o el precio justo con la ganancia para cada acontecimiento, para establecer la equidad del mismo, mediante un sumatorio ponderado cuando el valor final es cero. Cabe señalar que es la interpretación subjetiva de la probabilidad, en el siglo XX, quien retoma el sentido de la expectativa de Huygens. El uso de modelos de spinners en la educación, también enfatizan la expectativa y no la probabilidad (Cardeñoso, 2001).

Las estrategias necesarias para un buen discernimiento de la situación pueden variar cuando se trata de comparar fenómenos dicotómicos, en los cuales basta aplicar estrategias de tipo aditivo, ya que cuando se conocen las posibilidades se consideran las favorables o las desfavorables al acontecimiento (Cardeñoso, 2001). Un mayor nivel de dificultad en la comparación, lo constituyen fenómenos que muestran sus posibilidades relacionadas mediante un número natural. Aquí se requiere una necesaria aplicación de una comparación de carácter aditivo reiterado, proporcionalidad o multiplicidad natural. Cabe mencionar una tercera tipología de comparación cuando los aleatorizadores no muestran relación ninguna entre las oportunidades que en uno y otro marco. Usando el modelo de urna, si se tienen dos urnas en las cuales la primera contiene tres bolas rojas y cinco negras y la segunda trece rojas y dos negras, para compararlos hay que construir una relación de carácter multiplicativo entre proporciones (Cardeñoso, 2001).

En el caso de situaciones más complejas, dada la multiplicidad no equiposible en cada uno de los fenómenos a comparar a través de un determinado acontecimiento, puede dar lugar a una doble comparación (Cardeñoso, 2001). Es así como la primera hace relativo el acontecimiento en cada aleatorizador y la segunda se reduce a la anterior situación ya planteada. De este modo, las estrategias aditivas, proporcionales y multiplicativas sirven para comparar dos acontecimientos dentro de un mismo fenómeno. Se entiende que esto no supone asignar una medida a los acontecimientos para luego compararlos (Cardeñoso, 2001).

3.2.3.2. Aspecto cuantitativo

Desde que se admite como objeto de conocimiento, no solo de opinión, el estudio de los fenómenos de incertidumbre, aparecen los primeros intentos de medir aquellas expectativas de la ocurrencia de algún evento o la tendencia de dicho evento a aparecer (Cardeñoso, 2001). Los valores asignados son afrontados de distinta forma, según desde qué interpretación de la probabilidad sean enfocados.

Para poder realizar comparaciones de los fenómenos que se reconocen como inciertos, la forma que permite dicha comparación tiene que ver con determinar y "fijar" un hecho reconocido como aleatorio, a modo de nexo de la relación entre dichos fenómenos (Cardeñoso, 2001). Como resultado se obtiene una familia de clases de referencia ordenadas, donde toma sentido el plantearse la ocurrencia incierta de un cierto suceso.

Con el objeto de comparar en forma general entre acontecimientos, es necesario descontextualizarlos de la familia de fenómenos donde está enmarcado (Cardeñoso, 2001). Esto se logra realizando una abstracción al asignar un valor relativo a cada suceso, en el continuo [0,1]. En este esquema el "0" representa al evento imposible de suceder, mientras que el "1" corresponde al acontecimiento "tautológico" al fenómeno, es decir, que es seguro que ocurra. Con esto se introduce de alguna manera una forma de "medir" la incertidumbre, quedando definido un índice relativo de probabilidades entre 0 y 1.

Cabe destacar que el desarrollo de la teoría de probabilidades partió desde la consideración de las posibilidades justas o equitativas. Esto comenzó con los problemas de equidad en los juegos de azar y, gradualmente, se fue expandiendo hasta llegar a la consideración del conocimiento sobre una larga serie (Cardeñoso, 2001). En este contexto, Pascal y Fermat no discutían acerca de probabilidades sino acerca del "peso" de las argumentaciones. En el caso de Bernoulli, éste consideró la probabilidad como "grado de certeza", relacionado con la equidad. Es decir, un argumento tiene una cierta parte de certeza en función de su precio equitativo y se apoya en la frecuencia de los resultados. En síntesis, va de la equidad a los grados de creencia y de éstos al conocimiento de la serie aleatoria.

Desde otra perspectiva, se enfatiza un tipo de razonamiento denominado “Contingencia” (Peirce, 1968; citado en Cardeñoso, 2001). El mismo autor señala que “*es curioso como este tipo de razonamiento no suele ser tratado, en lo que se refiere al aprendizaje de la probabilidad, pese a que se podría considerar como un heurístico que provoca una considerable cantidad de sesgos en el razonamiento humano*” (p. 69). Por tratarse de una ponderación aditiva, cuando la situación no es comparable aditivamente no presenta este carácter heurístico, sino más bien se muestra como un deslizamiento de las estrategias de recuento deterministas aplicadas a un contexto “resbaladizo”. En más de una ocasión funcionan correctamente, por lo que se podría considerar como del tipo de tareas “pre-probabilísticas”, al plantearse situaciones que realmente no requieren de un recuento ponderado de las opciones, solo con apariencia probabilística (Cardeñoso, 2001). Es por lo que la contingencia funciona asignando probabilidades con valores equivalentes a la estrategia Laplaciana o frecuencialista. La contingencia tiene que ver con la asociación entre un inventario de posibles sucesos favorables y desfavorables. Su contexto de aplicación se transfiere a objetos o fenómenos de carácter lúdico (Cardeñoso, 2001).

La ponderación de las posibilidades por múltiples combinaciones es una vieja idea que viene desde el “*Liber de ludo aleae*” de Cardano en 1560. Idea que culmina con la definición de probabilidad como “casos favorables divididos por casos posibles” realizada por Laplace en 1812 (Cardeñoso, 2001). Cabe mencionar que esta definición requiere que todos los casos posibles sean equiprobables, lo cual queda garantizado cuando está involucrado algún tipo de simetría. La equiprobabilidad sigue siendo el fundamento de la noción de muestreo aleatorio simple. En ese entonces, Laplace consideraba la probabilidad como un grado de creencia racional y sus reglas como autoevidentes, sin entrar en las diversas interpretaciones que se hacen hoy (Cardeñoso, 2001).

Desde los juegos equitativos se expresa un grado de creencia, base de las propiedades de simetría o hipótesis de equiposibilidad, aunque también tiene cierta base empírica que proviene de estudiar la geometría del aleatorizador para las consideraciones posibilistas (Cardeñoso, 2001). Se entiende que esta es otra forma de asignar probabilidades, perfectamente compatible con los presupuestos de Laplace, Bernoulli y De Morgan, desde la perspectiva clásica de probabilidades. Esta estrategia de cuantificación puede ser realizada "a priori" y en función de las características propias del fenómeno.

La interpretación frecuencialista aparece con el "*teorema aureum*" en el libro "*Ars Conjectandi"* de Bernoulli en 1713, la que hoy se conoce como ley débil de los grandes números. Esta ley relaciona la probabilidad individual con la "convergencia" probabilística de las frecuencias relativas (Cardeñoso, 2001). La estabilización de las frecuencias es un medio muy intuitivo de transferir la probabilidad abstracta en la frecuencia de la gran serie. No obstante, esta ley genera varios sesgos con la transferencia de las frecuencias de grandes (o pequeñas) series sobre una simple, decisión única. Esta idea frecuencialista ha sido base para la axiomatización de von Mises en 1919 (Cardeñoso, 2001).

La ley de convergencia de frecuencias relativas (ley de los grandes números de Bernoulli) es muy difícil, "*sin embargo, da a conocer el verdadero carácter de la probabilidad como una heurística para tomar decisiones transparentes, esto es, da a conocer que la probabilidad es - útil para* -" (Borovcnick y Peard, 1996, citado en Cardeñoso, 2001, p. 74). Desde la frecuencia no se pudo llegar a la equidad sino hasta Condorcet y no fue popular hasta el siglo XIX. Tal como señala Shafer: "*Ahora nosotros decimos que las posibilidades dadas por la teoría de la probabilidad son equitativas porque ellas son posibilidades desde las cuales salimos sin ganar ni perder en la larga serie*" (Cardeñoso, 2001, p. 74).

En el marco de la teoría de errores, puede anticiparse la ley de los grandes números de Bernoulli, la cual trata con la contracción de la distribución de las frecuencias relativas teórica, hacia la probabilidad desconocida de un experimento binomial (Cardeñoso, 2001). Una similar ley de los grandes números se obtiene por la medida de pruebas repetidas. Al respecto, Borovnick y Peard: "*Aquí el contexto de la teoría* *de error se usa para hacer una conexión indirecta con las matemáticas*" (Cardeñoso, 2001, p. 74). Al comparar los histogramas que resultan de los errores de medición permite observar que la repetición de mediciones se distribuye alrededor de la misma línea central, con la disminución de la variabilidad al aumentar la longitud de la serie. La variabilidad menor para las frecuencias de la serie más grande, medida a través de la desviación estándar, indica como la ley de los grandes números debería ser interpretada. Acorde a esta ley, los muestreos mayores ofrecen medidas más precisas (frecuencias relativas) de una probabilidad desconocida (Cardeñoso, 2001).

En el siglo XIX se desarrolló la interpretación frecuencialista y se hace dominante a partir de entonces, acorde a la filosofía empirista. Dicha filosofía considera las ideas sobre creencia y al peso de los argumentos como ideas "metafísicas". Esto está basado en la consideración de la frecuencia como propiedad observable y objetiva de los fenómenos, independiente de la consideración de algún observador.

En el siglo XX toman fuerza las viejas ideas "no frecuencialistas", más de carácter epistémico sobre el significado de la probabilidad y su cuantificación. En forma explícita aparece la interpretación sobre la creencia, la cual reemplaza la idea de posibilidades justas y grados de creencia racional de los "antiguos", por el grado de "creencia personal". Por ejemplo, dicha creencia representa la posibilidad de apostar y que convierte la conducta de apuesta de una persona en un hecho empírico no metafísico.

En el mencionado enfoque, "*las frecuencias relativas están al final, la idea de ponderación de la incertidumbre es el punto de partida, y la simetría de los juegos de fortuna es una expresión de una idea para calibrar unos pesos concretos sobre una escala material*"(Cardeñoso, 2001, p.75). El autor señala que una comprensión más profunda del supuesto de independencia debería permitir entender que el hecho de observar frecuencias anteriores no es de ayuda en el sentido de predecir el próximo resultado simple. No obstante, estas frecuencias relativas son base para la estimación de la probabilidad, que puede ser información para la predicción de frecuencias de una nueva serie de sucesos.

Desde los supuestos de Venn, Von Misses o Reinchenbach, en una perspectiva frecuencialista, es claro que la probabilidad se puede asignar desde el uso de las frecuencias observadas (Cardeñoso, 2001). En cambio, desde posturas más personalistas (por ejemplo, la bayesiana) es posible asignar en una estimación de lo que se está dispuesto a apostar, a modo de indicador del "riesgo" a correr al comparar entre diversas situaciones, por ejemplo, en las carreras de caballo. Este tipo de asignaciones requiere de un grado de creencia personal, con una clara coherencia para que se garantice cierta estabilidad.

La idea de ponderar la evidencia está basada en un juicio personal que puede usar tanto información cualitativa como cuantitativa disponible. Para hacer evaluaciones subjetivas de probabilidad, un individuo debe estar lo suficientemente informado o bien ser experto. Finalmente, la objetividad es lograda por la aplicación de algunos axiomas de racionalidad, sobre el sistema de preferencias de la persona (de Finetti, 1937, citado en Cardeñoso, 2001)

Además es posible asignar otros índices que permitan la cuantificación desde teorías formales que fundamentan la teoría matemática de la decisión (Ramsey, Savage o De Finetti, citados en Cardeñoso, 2001). Desde teorías como la de Keynes, Carnap o Jeffreys, en cuyas afirmaciones de tipo inductivo se compara el riesgo entre diversas situaciones (Cardeñoso, 2001). El riesgo es estimado para cometer un error en la aceptación de una hipótesis nula y rechazo de la hipótesis alternativa, o en el rechazo de la primera y aceptación de la hipótesis alternativa.

Desde la teoría axiomática, es necesario definir una métrica en los espacios de sucesos correspondientes que, como magnitud, permita su comparación cualitativa y asignación de un valor cuantitativo, una vez constatado el cumplimiento de la axiomática correspondiente. Esta medida se construye con independencia de la interpretación real de cada situación, cosa que la propuesta de Kolmogorov o Fine ignoran, ya que su propósito es otorgar un soporte "axiomático-deductivo" a la teoría matemática (Black, 1984, citado en Cardeñoso, 2001).

3.3. Dificultades para enseñar a razonar en el contexto de la aleatoriedad y el concepto de probabilidad

La aleatoriedad se percibe como una noción que sólo puede ser definida en función de los instrumentos disponibles, para probar que un cierto fenómeno es aleatorio, además del cuerpo de conocimiento y la referencia que se considere. Vale decir, no existe una única forma, precisa y válida universalmente para definir la aleatoriedad (Kyburg, 1974; Cardeñoso, 2001; citados en Azcárate, 2006).

Para la elaboración del conocimiento estocástico y el reconocimiento de sus posibilidades de estudio, es clave la manera en cómo se conciben y explican los eventos aleatorios. Es claro ver que una mala comprensión de la aleatoriedad se puede transformar en un obstáculo epistemológico (Hietele, 1975; Konold et al., 1991; Steinbring, 1991; citados en Azcárate, 2006).

En la misma línea de nociones básicas, el concepto de probabilidad es también un término de no fácil comprensión, ya que entra en contradicción con el pensamiento determinista y causal que predomina en los ambientes educativos.

> *"La probabilidad es un concepto particularmente resbaladizo. A través de la probabilidad intentamos demarcar un estado amorfo situado entre dos extremos imaginarios: la total ignorancia y el conocimiento perfecto"* (Konold, 1991; citado en Azcárate 2006, p.4).

Cuando se utiliza el modelamiento matemático, en donde se recurre a las probabilidades como datos, puede ser interpretado desde diferentes perspectivas (Azcárate, 2006). Desde un punto de vista experimental, se puede hacer una caracterización por medio de las frecuencias relativas observadas obteniendo un valor más objetivo. Desde un punto de vista teórico, se puede recurrir a la probabilidad clásica o “a priori” que se basa en las condiciones del experimento. Finalmente, desde un punto de vista más subjetivo se puede establecer una probabilidad como resultado de hipótesis, establecidas a partir de las propias creencias de una persona o bien desde estimaciones en función de ciertos datos empíricos.

Si el objetivo es una comprensión “integral” de la noción de probabilidad, entonces es necesario considerar las diferentes interpretaciones. Es fundamental que este aspecto sea considerado al momento de tratar estos contenidos en el aula para facilitar el desarrollo del pensamiento probabilístico (Azcárate, 2006).

El pensamiento estocástico, a diferencia de otras áreas de la matemática como Aritmética, Geometría o Álgebra, siempre está vinculado a situaciones reales. Por esto mismo siempre será imprescindible establecer una clara diferencia entre la situación real y el modelo matemático, desde el comienzo.

> *“El razonamiento estocástico no es algo inmediato y dependiente exclusivamente del desarrollo de los individuos, sino que se construye progresivamente en interacción con el entorno. Dicho razonamiento parte de unas intuiciones iniciales que aparecen desde edades muy tempranas y que no evolucionan paralelamente al desarrollo lógico del sujeto”* (Azcárate, 2006, p.4).

La enseñanza de las probabilidades ha de reflejar, por lo tanto, esta necesaria y adecuada interacción entre el modelo matemático y la situación experimental, según los distintos niveles de complejidad. Este particular requerimiento de la Estocástica, claramente propone cambios en la forma de enseñar del docente, es decir, por ejemplo, la aproximación del conocimiento estocástico por diferentes caminos interrelacionados: lo empírico, lo intuitivo y lo formal (Falk y Konold, 1992; citado en Azcárate, 2006).

En dichas situaciones aparecen dos elementos básicos para el desarrollo del pensamiento estocástico: los medios de representación de los datos obtenidos y la actividad que con ellos se realice. En el caso del conocimiento estocástico, un elemento que refleja las posibles interacciones entre el modelo matemático y el caso individual es su modelización mediante los diferentes medios de representación, como tablas o gráficos (Steinbring, 1991, citado en Azcárate, 2006).

3.4. Formatos “ecológicamente” válidos

Se sabe que hasta los estudiantes de ingeniería y matemáticas cometen errores en el cálculo de probabilidades (Araya, 2000). Por ejemplo, supongamos que se lanza una moneda ocho veces consecutivas. ¿Cuál de los siguientes eventos es más probable?

a) CCCCCCCC
b) CSCSCSCS
c) CSSCSCCS

La mayoría de las personas piensa que el más probable es el evento (c) y que el menos probable es el evento (a). Desde el punto de vista de las probabilidades, en realidad, los tres eventos son igualmente probables (Araya, 2000).

Muchos de los que escriben sobre probabilidades cometen graves errores al confundir suposiciones con base empírica y verdades matemáticas (Alfred Ayer, 1972; citado en Araya, 2000). Por ejemplo, si se considera el experimento de lanzar una moneda no cargada los dos eventos posibles son que salga cara o sello, sin embargo, la probabilidad de que salga cara (evento básico) es un asunto empírico. La matemática solo se ocupa de la deducción de las probabilidades para los eventos compuestos.

¿Cuál es el origen de estas dificultades? ¿De dónde provienen las limitaciones que se tienen para las Probabilidades y para la Estadística? (Araya, 2000). Sólo a mediados del siglo XVII aparece la noción de probabilidad y sólo hace unos pocos años, vocablos y conceptos de las probabilidades se han incorporado al lenguaje corriente (Gigerenzer, 1998; citado en Araya, 2000). Gigerenzer hace énfasis en que representar grados de incerteza como probabilidades y porcentajes no es un formato natural a la mente, “no es ecológicamente válido”[4]. Luego, el problema es el formato. Por ejemplo, si en lugar de expresar que la probabilidad de un cierto evento es 0,33, se dice que de 100 veces dicho evento ocurre 33, esto último es de más fácil comprensión. Si bien las expresiones matemáticamente son equivalentes, para nuestra mente no es lo mismo.

Existen otras dos dificultades del formato probabilístico o porcentual (Cosmides y Tooby, 1996; citado en Araya, 2000). Estos autores insisten en la importancia de usar frecuencias naturales y no porcentajes para las probabilidades, ya que por ejemplo no tiene sentido estimar la incertidumbre de un solo evento, es algo abstracto. Por ejemplo, no es tan comprensible hablar de la probabilidad de que salga cara al lanzar una moneda. Al contrario, sí tiene más sentido hablar que de 100 veces que es lanzada la moneda, aproximadamente 50 corresponderán a caras.

Los mismos autores señalan que otra dificultad es la “individuación”. Vale decir, estamos hechos para contar objetos completos, pero no aspectos inseparables de objetos. Cosmides y Tooby agregan que para las personas es más fácil segmentar y contar objetos enteros tal como se dan en la naturaleza: bajo condiciones ecológicamente válidas. La capacidad de contar no es una capacidad general, es una capacidad específica (Araya, 2000). Depende del contenido y de la situación. Este punto es clave, ya que aquí reside gran parte de las dificultades para resolver problemas sobre probabilidades. Para ilustrar lo anterior, Araya (2000) propone siete problemas sobre probabilidades, de los cuales aquí se muestra solo el primero:

Problema 1: Imagine tres cartas: una con ambos lados de color rojo, otra con ambos lados de color blanco y una tercera con un lado rojo y el otro blanco. Si se esconden las tres cartas en un sombrero y luego se saca una y se muestra por un lado resultando rojo. ¿Cuál es la probabilidad que el otro lado sea rojo?

[4] Expresión usada por Roberto Araya, a partir de los estudios de Gigerenzer.

Según Brase, Cosmides y Tooby (citados por Araya, 2000) este problema es difícil y solo un 7% de los estudiantes[5] lo resuelven. Si a este mismo problema se le modifica el enunciado, es posible mejorar los porcentajes de respuestas correctas. A continuación en la tabla se muestran dos modificaciones y sus efectos respectivos.

Cuadro 2.2: Modificaciones al problema original de las tres cartas (Araya, 2001, p.34)

Problema	**Cambio**	**Aumento de porcentajes de respuestas correctas**
P1.1. (modificación 1)	Repetición por 30 veces de sacar las tarjetas en lugar de solo una vez.	28% Observación: este pequeño cambio mejora la comprensión.
P1.2. (modificación 2)	Se cambian las cartas por jarrones. El primero con 100 dulces rojos, el segundo con 100 dulces blancos y el último con 50 dulces blancos y 50 dulces rojos. Si se vacían los tres jarrones en una caja y se sacan al azar 30 dulces rojos, ¿cuántos de esos dulces provienen del primer jarrón, cuántos del segundo y cuántos del tercero??	45% Observación: es más fácil contar dulces o bloques (objetos completos) que lados de una carta. Uno tiende a contar la carta completa, he ahí la confusión.

¿A qué se debe la mejora? Brase, Cosmides y Tooby señalan que la situación tiene que ver con el conteo, es decir, cada vez es más fácil contar los eventos favorables. Esto coincide con contar objetos físicos. En cambio en el problema 1 original no se puede dejar de contar "cartas" (que son objetos físicos). Este conteo es casi instantáneo y es muy "saliente" y, por lo tanto, interfiere con el conteo de los eventos equiprobables que realmente se necesitan contar y que son mucho más abstractos. La competencia que se produce entre las diferentes activaciones perceptuales y semánticas no siempre se resuelve a favor de una variable relevante del problema (Taylor, 1999; citado en Araya, 2000).

En síntesis, la habilidad de contar no es general, depende críticamente de la naturaleza específica de lo que se cuenta y del contexto (Araya, 2000). "*Para nosotros es más simple contar objetos completos, que se mueven como una unidad,*

[5] Estudiantes de la Universidad de California.

independiente de otras superficies. En otros objetos o en otras condiciones, otras características más salientes o naturales son seleccionadas y contadas" (p.115).

¿Cómo usar estos hechos en la enseñanza de las Probabilidades y la Estadística? La información necesita representación, sin embargo, algunas representaciones son más simples para la comprensión que otras (Gigerenzer, 1998; citado en Araya, 2000). Tal como argumentan Araya y Gigerenzer, es más adecuado utilizar formatos "ecológicamente válidos". Por otra parte, también es necesario considerar la manera en que a los sujetos les es más natural realizar el conteo de los objetos y dónde existen complicaciones. Finalmente, esto implica desarrollar estrategias educacionales que apunten en esta dirección, donde el propósito sea facilitar el aprendizaje de las probabilidades (Araya, 2000).

4. Antecedentes respecto de investigaciones acerca de las concepciones sobre azar y probabilidades

Al revisar la literatura, se pueden encontrar investigaciones acerca de distintos tipos de concepciones. Por ejemplo, están aquellas que se enfocan al estudio de los profesores sobre los contenidos matemáticos que deben enseñar. Como señala Cardeñoso (2001), dichas investigaciones están orientadas a temas propios del conocimiento numérico, en menor número al conocimiento geométrico o de magnitudes, y significativamente menor en lo que se refiere al conocimiento estocástico.

Para comenzar se puede citar a Moustagin (citado en Cardeñoso, 2001), en los ochenta, y su estudio con futuros profesores de matemáticas, respecto al conocimiento estocástico. El propósito fue averiguar de qué manera enfrentan y resuelven situaciones de incertidumbre los profesores en formación. A través de un cuestionario que consta de siete situaciones relacionadas que involucran los heurísticos de representatividad y de disponibilidad. Con una muestra de 886 estudiantes de cinco escuelas de profesorado, en general, con formación estocástica durante dos años, excepto en 38 casos. Se realizaron además entrevistas semi-estructuradas. Los resultados muestran que un número significativo de estudiantes utilizan estrategias heurísticas (Cardeñoso, 2001). También se detecta que en la mayor parte de las situaciones planteadas aparecen diferentes formas de argumentación personal. Se comprueba además que las intuiciones primarias persisten aún tras la enseñanza formal, de modo que hace hincapié sobre la importancia de considerar una enseñanza temprana en estos tópicos. Finalmente, como una forma de evitar influir en las salas de clase, recomienda que es necesario tomar conciencia de los sesgos y estrategias de razonamiento utilizadas por los profesores.

Por otra parte se pueden destacar los trabajos de Steinbring (citado en Cardeñoso, 2001), en los ochenta y noventa, quien reconoce al profesor como una pieza clave en el "complejo sistema" que representa la Educación Matemática (Cardeñoso, 2001). En el caso de la incorporación de nuevos contenidos en el currículum, el papel del profesor se incrementa, ya que se hace necesaria la formación docente en el conocimiento estocástico. Steinbring señala que existen contradicciones entre las concepciones de los profesores acerca de la Matemática y la precisión de su contenido, y la propia característica "incierta" de los resultados del conocimiento estocástico (Cardeñoso, 2001).

Otra investigación interesante es la que realiza Russell (citado en Cardeñoso, 2001), en los noventa. El autor mencionado investiga acerca de los conceptos básicos de probabilidad que tienen un grupo de profesores. Russell detecta una comprensión débil de los docentes respecto a las ideas estocásticas básicas. Un estudio similar es el realizado por Greer y Riston (citados en Cardeñoso, 2001), también en los noventa, quienes entrevistan a coordinadores de matemática y profesores de primaria y secundaria, en cuarenta escuelas. Las conclusiones de estos autores van en la misma dirección de Russell.

La investigación de Greer y Riston incluye un análisis de las concepciones de los docentes acerca de la probabilidad y su percepción respecto a ella como contenido curricular. Las conclusiones señalan que tanto profesores de primaria como de secundaria reconocen a la probabilidad como un área poco relevante del currículum (Cardeñoso, 2001). Dado que los docentes tienen poca confianza en su capacidad para enseñarla, es inevitable que este contenido se postergue. Consecuentemente, los autores señalan la necesidad de formar a los docentes de primaria y secundaria, en el conocimiento estocástico, para instalar la enseñanza de la probabilidad en el aula. Una de las conclusiones más claras del estudio, es la ausencia de formación específica sobre el tema, en la mayoría de los profesores.

En otro estudio, Rubin y Roseberg (citados en Cardeñoso, 2001), en los noventa, dirigido al conocimiento estocástico, concluyen similarmente a los estudios señalados anteriormente. Los autores señalan que "*en el mejor de los casos, los profesores han* *tenido alguna formación estocástica, pero esta ha sido planteada desde una perspectiva fundamentalmente aplicada, sin entrar en controversias de significado*" (Cardeñoso, 2001, p. 114). Rubin y Roseberg, argumentan que los profesores no están preparados para conectar el conocimiento estocástico con el mundo real, no solo por constituirse en una aplicación sino en lo que respecta a su propio significado.

Fischbein, en los noventa, propone que la dificultad de la enseñanza del conocimiento estocástico, se debe a que dicho pensamiento es intrínsecamente diferenciado del razonamiento determinista, bajo el cual los profesores fundamentalmente han sido formados (Cardeñoso, 2001). "*Las grandes dificultades detectadas en la formación de los profesores proviene de no poder modificar sus concepciones espontáneas a través de una mera aportación teórica, porque estas concepciones se caracterizan por poseer obstáculos intuitivos que han construido en la experiencia cotidiana*" (Cardeñoso, 2001, p.114)

En el caso de profesores primarios el problema es más complejo, debido a que son docentes generalistas. Al respecto Pereira – Mendoza (citado en Cardeñoso, 2001), plantea que no tiene sentido contar con cursos de formación específica sobre el conocimiento estocástico, ya que no es posible incluir un componente centrado exclusivamente en estas materias. El autor señala que el conocimiento estocástico y la problemática de su enseñanza deben conformarse como proyectos de formación interdisciplinares. En dichos proyectos se debe enfatizar el papel de la incertidumbre en los fenómenos cotidianos y su posible predicción desde el conocimiento probabilista de la realidad. En el caso de los procesos de formación, se observa la deficiente formación docente en esta área y el consiguiente problema de comprensión que reflejan sus manifestaciones (Scott, 1994; Pereira-Mendoza, 1994, citados en Cardeñoso, 2001).

Una línea de investigación muy relacionada con el presente trabajo es la desarrollada por autores tales como Azcárate (1995) y Azcárate y Cardeñoso (1997). Para la investigación de base Azcárate utiliza un cuestionario y entrevistas para recoger información acerca de las ideas de un grupo de 57 futuros profesores de primaria, respecto a los conceptos de aleatoriedad y probabilidad. Dentro de los resultados, destaca una débil comprensión de la noción de aleatoriedad por parte de los sujetos estudiados, además de una fuerte presencia del pensamiento causal. Respecto del concepto de probabilidad, es posible concluir que existe un tratamiento pre-formal de este contenido y una escasa aplicación de procedimientos normativos al momento de realizar asignaciones de probabilidad a situaciones en contextos de incertidumbre.

La investigación señalada es de carácter fundamentalmente cualitativo y emergente, en la cual la información es interpretada desde la reflexión teórica en lo conceptual y didáctico (Cardeñoso, 2001). El cuestionario utilizado consta de 26 ítemes abiertos acerca de la interpretación probabilística, el razonamiento combinatorio, la identificación de fenómenos aleatorios y la asignación de probabilidades. Azcárate (1995) realiza un análisis cualitativo (categorial y de contenido) y cuantitativo (descriptivo y multivariante) respecto de las argumentaciones. Respecto de la parte empírica del trabajo de Azcárate (1995), la información fue codificada y analizada acorde a un sistema de categorías según la estructura que se muestra a continuación:

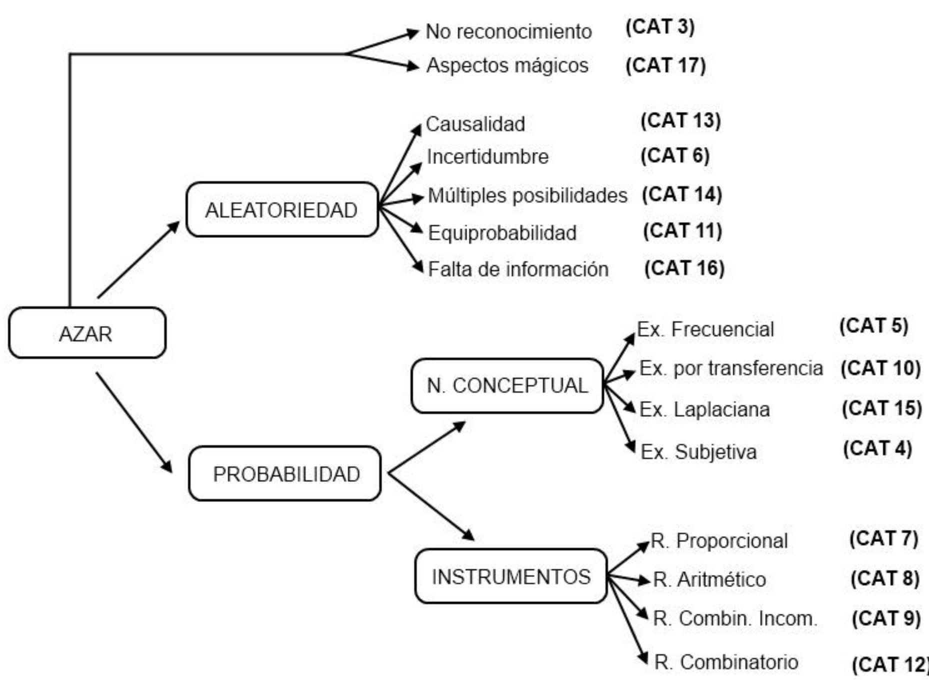


Figura 2.3: Sistema de categorías de Azcárate (1996)

La estructura de categorías se presenta desde la comprensión del concepto de azar, en su carácter filosófico, subdividida en las dimensiones de aleatoriedad y de probabilidad. Vale decir, desde una modelización matemática respecto a la noción amplia de aleatoriedad y el estudio desde la aproximación probabilística de la incertidumbre presente en ciertos fenómenos (Cardeñoso, 2001). La noción de probabilidad se divide a su vez en los aspectos conceptual e instrumental, de modo que para el estudio del azar se consideran las tres dimensiones diferenciadas.

La investigación de Azcárate (1995) da lugar a un sistema provisional de categorías, esperadas desde el estudio teórico que, posteriormente, queda como un sistema definitivo de 17 categorías. La investigación plantea, a partir de la indagación teórica, una hipótesis de progresión del conocimiento, propone cuatro tipos de concepciones que se sintetizan en la siguiente tabla, en el cual se presentan los tres indicadores que caracterizan a cada uno (Cardeñoso, 2001). Estas tipologías tienen la virtud de modelizar el funcionamiento global de los individuos ante situaciones de incertidumbre.

Cuadro 2.3: Modelos de concepciones según Azcárate (1995)

Concepción No Probabilística	**Concepción Probabilística Intuitiva**	**Concepción Probabilística Emergente**	**Concepción Probabilística Normativa**
No reconocimiento claro del azar y de los sucesos aleatorios.	Alguna comprensión del azar y de los sucesos aleatorios.	Una comprensión incipiente sobre la existencia de múltiples representaciones matemáticas del azar, desde diferentes perspectivas.	Una profunda comprensión de la noción de aleatoriedad y su aplicación al estudio de la realidad.
Modelos de Razonamiento determinista.	Razonamientos basados fundamentalmente en el uso de heurísticos de juicio.	Habilidad para aplicar modelos normativos a problemas simples y familiares.	Habilidad para seleccionar y aplicar modelos normativos y su relación con los diferentes contextos y fenómenos.

Respuestas basadas en creencias y con criterios de causalidad y/o expectación de resultados inmediatos	Respuestas basadas en modelos no normativos, con muy diferentes valoraciones de las situaciones dependiendo de la experiencia personal.	Diferenciación reconocida entre las creencias intuitivas y los modelos matemáticos.	Capacidad para comparar y contrastar los diferentes modelos y razonar bajo criterios normativos en las distintas situaciones aleatorias.

Azcárate (1995) afirma que a partir de dicho referente como hipótesis teórica, evidencia su carácter provisional y que requiere un ajuste con la realidad de las conceptualizaciones aportadas desde los informes de investigación. Azcárate centra su investigación en el conocimiento profesional referido al contenido estocástico, indagación básica para determinar el conocimiento didáctico-matemático del currículo de los futuros profesores de Primaria (Cardeñoso, 2001). Desde los cuatro posibles modelos teóricos (no probabilista, intuitivo, emergente y normativo), se interpretan, ordenan y ubican las tendencias obtenidas: determinista, causal, incertidumbre e indeciso.

El estudio de Azcárate (1995) ofrece una imagen global de las concepciones de un grupo de 57 profesores primarios, respecto al pensamiento probabilístico. Éste queda caracterizado fundamentalmente por su naturaleza intuitiva, cercano al conocimiento cotidiano del mundo de la incertidumbre. Desde lo teórico y empírico Azcárate identifica como puntos clave para la reflexión respecto del conocimiento profesional docente deseable en un profesor de primaria:

a) La compleja naturaleza del conocimiento estocástico.
b) Las condiciones del aprendizaje.
c) La peculiar naturaleza de su enseñanza.

Como primer elemento respecto a la formación de profesores, se concluye acerca de la necesidad de partir desde las concepciones y recursos de los sujetos para luego enfrentarlos con situaciones donde entren en conflicto dichas concepciones. Por otra parte se plantea la formación de profesores desde un diseño metodológico que potencie la interacción continua entre lo intuitivo, lo empírico y lo formal, con el objetivo de reformular las concepciones iniciales. Es necesario concretar la metodología en contextos y situaciones relacionadas con la labor docente de los profesores, es decir, en el marco de una formación profesionalizada del contenido estocástico, ligados a estrategias de diseño, tratamiento y experimentación curricular.

Los autores Pfannkuch y Brown (citados en Cardeñoso, 2001), realizan un estudio del razonamiento probabilístico en profesores, respecto del reconocimiento de la variabilidad existente en el entorno. Consideran que dicha variabilidad es una propiedad "omnipresente" en nuestra realidad y aluden a la existencia de dos modelos de pensamiento que permiten explicarla: el modelo determinista y el probabilístico. Participan 10 sujetos, entre 30 y 35 años. Primero se realiza una entrevista acerca de las ideas sobre variación y probabilidad en diferentes contextos. Luego se diseña un curso de un día para incidir en dichas ideas y ver si es posible incrementar su comprensión sobre la variación y la probabilidad. Finalmente, se entrevista de nuevo a los sujetos para chequear si han modificado en algo sus ideas.

Los autores del estudio indican que en general los sujetos manifiestan una tendencia al pensamiento determinista, de modo que involucran explicaciones causales acerca de la variación, reflejando una clara ausencia de comprensión en el concepto. En este contexto, la comprensión probabilística implica una evolución y discusión acerca del modelo sobre el azar y la variación, en cuanto a atraer la atención de los sujetos hacia el punto de vista probabilista. Los datos confirman un nivel de cambio insignificante en cuanto a trabajar las intuiciones de los individuos, situación que atribuyen a la corta duración del curso. Esto evidencia la dificultad de cambiar las ideas de los adultos acerca de la incertidumbre y lo necesario de contar con las ideas intuitivas como parte del proceso de formación docente.

Konold (citado en Cardeñoso, 2001), señala que la mayoría de los adultos usan el conocimiento probabilístico adecuado cuando razonan sobre situaciones que son claramente probabilísticas y tienen un espacio muestral simple (por ejemplo, el lanzamiento de monedas). Aunque los datos también detectan la aparición de ideas simultaneas que, en algunos casos, son contradictorias. Vale decir, los sujetos podían suscribirse simultáneamente a dos ideas y activarlas según contexto y creencias. Sin embargo, ante situaciones del mundo real la mayoría de las explicaciones realizadas son bajo razonamiento causal que los sujetos extraen de su propia experiencia.

Otro trabajo muy relacionado con la presente investigación, es el desarrollado por Cardeñoso (2001). Desde una línea de investigación centrada en el desarrollo profesional de los profesores, en el seno del Grupo de investigación "Desarrollo Profesional del Docente", Cardeñoso plantea una investigación confirmatoria de los resultados obtenidos por Azcárate (1995), ya descrito anteriormente.

El propósito de esta investigación está centrado en el estudio de las concepciones que tienen los profesores de educación primaria en ejercicio, respecto al campo de conocimiento probabilístico, más concretamente sobre dos de sus nociones básicas: aleatoriedad y probabilidad. La información se recopila en base a la participación de 598 individuos en la investigación. Tras la exposición del marco teórico del investigador, tanto en su perspectiva didáctica, contextualizada en la formación de profesores, como el referido al desarrollo profesional, se presenta una síntesis de la noción de probabilidad, desarrollando los tres aspectos que Carnap, en los sesenta, identifica como comunes a todas la Teorías de las Probabilidades: clasificatorio, comparativo y cuantitativo.

El aspecto clasificatorio es analizado por Cardeñoso (2001) desde la caracterización propuesta por Kyburg, en los setenta, de la noción de aleatoriedad, basada en la consideración de cuatro elementos: sistema de ideas, conjunto de referencia, objeto y propiedad. La información proveniente de la literatura de investigación, se organiza en tres direcciones limítrofes con el campo problemático: comprensión de las nociones estocásticas, el razonamiento heurístico y, por último, sobre las formas de razonamiento de los profesores. Cardeñoso (2001) acorde a una caracterización de un marco conceptual sobre el conocimiento probabilístico, organiza la noción de probabilidad según el siguiente esquema.

PROBABILIDAD	Aspecto clasificatorio: la aleatoriedad	• Objeto de estudio • Referencia de conjunto • Proposición que determina dicha pertenencia • Un cuerpo de conocimiento como referente
	Aspecto comparativo: estrategias de recuento y comparación	
	Aspecto cuantitativo: estrategias de cuantificación y sus interpretaciones.	

Figura 2.4: Noción de probabilidad según Cardeñoso (2001)

Acorde a las categorías de Azcárate (1995) y con base en los estudios pilotos, Cardeñoso (2001) elabora un sistema definitivo de categorías, las que se muestran a continuación:

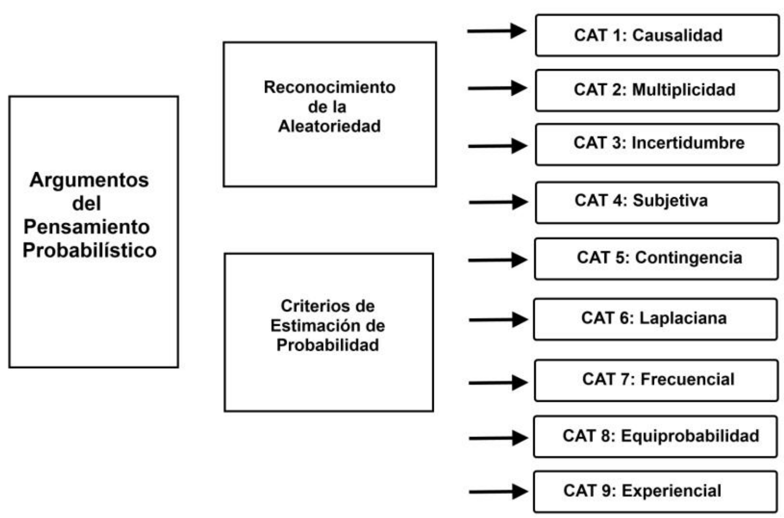


Figura 2.5: Estructura del sistema definitivo de categorías de Cardeñoso (2001)

Como fruto de la investigación desarrollada, se obtiene un Cuestionario de Concepciones Probabilísticas (CCP), acompañado de un algoritmo de clasificación para futuras respuestas al cuestionario. Se analizan las concepciones de los profesores en torno a las nociones consideradas: la caracterización de la Aleatoriedad y la estimación de la Probabilidad, detectándose una débil comprensión de la incertidumbre y su tratamiento matemático. Y, posteriormente, se identifican cinco tendencias, tres de las cuales confirman los resultados de Azcárate (1995): Determinista, Causalidad e Incertidumbre y se detectan dos nuevas tendencias de pensamiento: Contingencia y Personalista.

Cardeñoso (2001) evidencia desde el análisis de los resultados, la inadecuada preparación de los actuales profesores de educación primaria, al menos por las concepciones que denotan, para el desempeño de una docencia relacionada con la introducción al conocimiento probabilístico de la realidad, ya que carecen ellos mismos de tal visión o representación organizada. Se concluye la importancia y las consecuencias que tienen los resultados de la investigación, en la formulación de estrategias formativas que favorezcan un desarrollo profesional de los profesores, en relación al campo de conocimiento estocástico.

Barragués, Guidasola y Morais (2005) realizaron una investigación con un diseño múltiple y convergente que incluye métodos cualitativos (entrevistas) y cuantitativos (cuestionario escrito). El cuestionario consta de seis enunciados de tipo abierto relacionados con situaciones en las que interviene el azar. El alumno debe elegir una de las respuestas y argumentar dicha elección. La atención de los investigadores estuvo puesta justamente en los argumentos de los estudiantes. Para esta investigación la muestra fue de 110 estudiantes distribuidos en tres grupos de un curso de ingeniería técnica industrial de la Universidad del País Vasco, seleccionados en forma aleatoria.

Al momento de responder el cuestionario, los grupos de estudiantes habían recibido enseñanza sobre el tema de probabilidad en sus respectivos cursos. Los ítemes 1 y 2 se construyeron para detectar un sesgo en la equiprobabilidad. Los autores señalan que las situaciones planteadas no son exactamente equivalentes a lo que proponen Tversky y Kahneman (citados en Barragués et al., 2005), ya que en este caso se hace referencia a sucesos con probabilidades desconocidas a los que los estudiantes asignan en forma arbitraria la misma probabilidad. Las respuestas se analizan en cuanto a las siguientes categorías: 1) Respuesta correcta, 2) Sesgo de equiprobabilidad, 3) No es posible estudiar el fenómeno, 4) Cálculo erróneo de la probabilidad, 5) Respuesta incodificable y 6) En blanco.

Los investigadores además realizan entrevistas a los estudiantes para profundizar más en los argumentos. Tras el análisis de los resultados, los investigadores concluyen que la mayoría de los estudiantes presenta ideas alternativas a las formales acerca del modo de estimar la probabilidad. Por lo tanto, la mayoría posee un conocimiento instrumental de la probabilidad, más que una comprensión relacional en los términos de Skemp (citado en Barragués et al., 2005), necesario para aplicar el conocimiento probabilístico. Un punto de interés es el hecho de que gran parte de los estudiantes acierta cuando aplica un procedimiento memorizado en una situación similar a la realizada en clases. No obstante, en las situaciones probabilísticas reales, por lo general los estudiantes no son capaces de construir el modelo teórico. Por último, solo una minoría de los estudiantes realiza un análisis de los fenómenos aleatorios propuestos usando formalmente la teoría de la probabilidad y calcula en forma correcta la probabilidad solicitada.

Ortiz, Mohamed, Batanero, Serrano y Rodríguez (2006) realizaron un estudio cuantitativo acerca de la comparación de probabilidades en maestros en formación. La muestra estuvo formada por 102 maestros en formación, lo cuales tienen una escasa formación en matemática, y particularmente en probabilidades. A través de un cuestionario de 7 ítems, se pregunta acerca de la probabilidad en experimentos aleatorios con fichas blancas y negras. Los ítemes propuestos fueron clasificados según los niveles de Noelting (citado en Ortiz et al., 2006). Se destacan las siguientes estrategias posibles: 1) Comparar casos favorables (Ia), 2) Comparar casos desfavorables (Ib), 3) Correspondencia (IIa, IIb, IIIa), 4) Reducir común denominador (IIIb).

Dado que en los ítems puede aplicarse el principio de indiferencia, la asignación de probabilidades puede hacerse mediante el modelo o regla de Laplace. Los autores comparan los resultados entre alumnos y futuros maestros. Los autores señalan que los resultados son preocupantes, dado la sencillez de los problemas (comparación de probabilidades simples) y el alto número de errores. Una segunda parte del estudio fue el análisis de las estrategias empleadas. El análisis se realiza según la siguiente clasificación: 1) Comparación del número de casos posibles, 2) Comparación del número de casos favorables, 3) Comparación del número de casos desfavorables, 4) Estrategias aditivas, 5) Estrategia de correspondencia, 6) Estrategias multiplicativas, 7) Otros tipos.

Acorde a los porcentajes obtenidos para cada estrategia, en relación a la investigación de Cañizares (citado en Ortiz et al., 2006) los futuros maestros hacen mayor uso de estrategias correctas y, en general multiplicativas y correspondencias, lo que significa un mayor razonamiento proporcional, a pesar de que aún un grupo importante usa estrategias aditivas. Los autores de la investigación concluyen que es necesario reforzar la formación probabilística elemental, de los futuros profesores de educación primaria que difícilmente podrán enseñar un tema en que muestran dificultades tan notables. También se concluye que además de la falta de razonamiento proporcional en algunos problemas, se ha observado una influencia de factores del problema que inducen la aplicación de probabilidades subjetivas.

Liu y Thompson (2007) realizaron una investigación para desarrollar un marco teórico que permita describir las comprensiones de los profesores sobre Probabilidad. Para ello realizaron un seminario de ocho días con ocho profesores de Estadística de la secundaria en el 2001. Para recoger los datos utilizaron videos en las sesiones, entrevistas, trabajos escritos y notas de campo. El análisis de los datos reveló que existe una compleja mezcla de concepciones y comprensiones acerca de la probabilidad, a menudo incoherentes cuando los profesores trataron de reflexionar sobre ellas, por lo que no fueron capaces de explicitar o desarrollar estrategias pedagógicas coherentes considerando la Probabilidad y la Inferencia Estadística.

Los ocho profesores fueron seleccionados acorde a los criterios de que hubiesen tomado cursos de Estadística y Probabilidad, además que estuviesen actualmente enseñando o hubiesen enseñado o se estuvieran preparando para enseñar estadística en la secundaria. El estudio presenta los resultados en tres partes:

1. Se elabora una concepción normativa de la probabilidad.
2. Se presenta un marco teórico desarrollado como resultado del análisis de concepciones de los profesores acerca de la probabilidad.
3. Se describen las comprensiones de los profesores acerca de la probabilidad. en el contexto de las actividades del seminario y las preguntas de la entrevista.

Los autores presentan el siguiente marco teórico con constructos sobre probabilidad:

Cuadro 2.4: Marco teórico sobre probabilidad según Liu y Thompson (2007)

Caminos (secuencias) de pensamiento (razonamiento)	1	Q1	¿Hay una imagen de un proceso repetible?
	2	Q2	¿Están las condiciones del proceso especificado?
	3	Q3	¿Hay una imagen de una distribución de los resultados?
Significados de la probabilidad Interpretaciones de comportamientos observables acerca de la probabilidad	4	OA	Una aproximación al resultado
	5	ANA	El resultado es A o no-A, esto es la probabilidad igual a 1 o 0
	6	PH	Heurística de proporcionalidad
	7	ANA	El resultado es A o no-A, esto es la probabilidad igual a 50%
	8	APV	La probabilidad es una proporción relativa: todos los posibles valores de las variables aleatorias.
	9	APO	La probabilidad es una proporción relativa: todos los posibles resultados.
	10	RF	La probabilidad es una frecuencia relativa: Distribución de todos los resultados.

Los autores presentan un marco teórico para comprensiones acerca de probabilidad, en el cual se diferencia una concepción no estocástica de la probabilidad versus una concepción estocástica, en los términos de Liu y Thompson (2007).

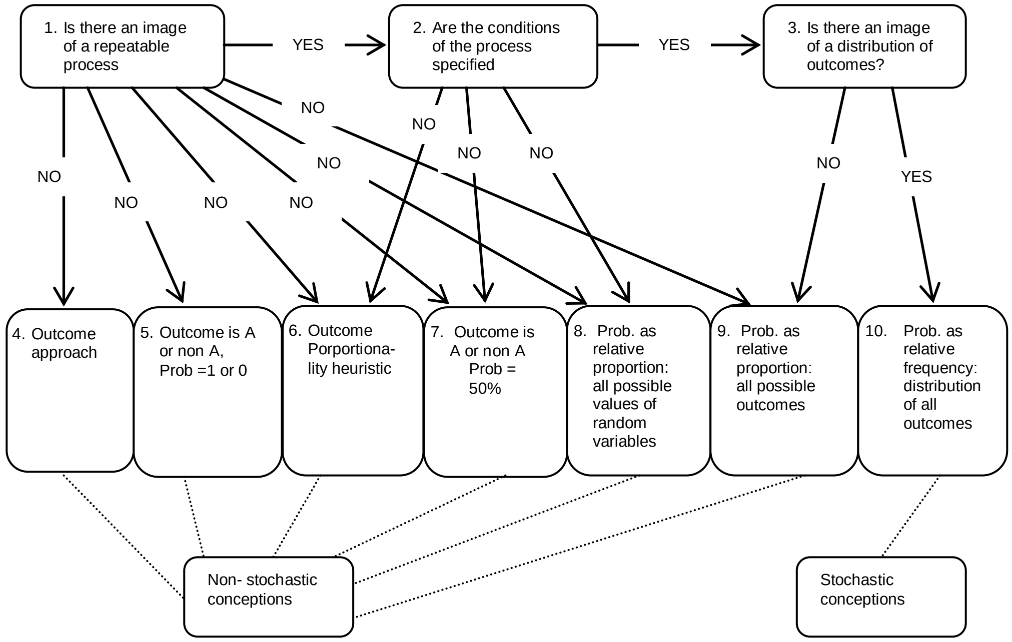


Figura 2.6: Concepciones estocásticas y no estocásticas, según Liu y Thompson (2007).

Concepciones no estocásticas: 1 → 4, 1 → 5, 1 → 6, 1 → 7, 1 → 8, 1 → 9, 1 → 2 → 6, 1 → 2 → 7, 1 → 2 → 8, 1 → 2 → 3 → 9
Concepciones estocásticas: 1 → 2 → 3 → 10

Los investigadores en cada una de las actividades propuestas contrastaron el marco teórico con las respuestas de los profesores en diferentes situaciones donde interviene el azar. Por ejemplo, la actividad 1 consiste en las siguientes preguntas:

Pregunta 1: ¿Qué significa "un 45% de probabilidades de lluvia"? Pregunta 2: Un encuestador les preguntó a 30 personas sobre la bebida que les gustaba más, Pepsi o Coca-Cola. 18, dijeron Pepsi. ¿Qué tan probable es este resultado?

Dentro de los análisis los investigadores construyen tablas para cada profesor participante con relación a sus concepciones y el contraste con el marco teórico. El hallazgo más importante de este estudio fue el marco teórico que surgió de los análisis de las comprensiones de los profesores acerca de la probabilidad. Este marco teórico, en comparación con investigaciones anteriores pertinentes, abre "la caja negra" de razonamiento probabilístico. Esto explica lo que constituye una poderosa y coherente comprensión de la probabilidad, las formas no convencionales de comprensión que la gente pueda tener, y cómo estas diversas formas de acuerdos se refieren a, o pueden convertirse en una comprensión coherente. Por ejemplo, el modelo puede usarse para diseñar evaluaciones del pensamiento probabilístico.

Salcedo y Mosquera (2008) realizaron una investigación de campo de carácter exploratorio, en relación a los sesgos en la interpretación de enunciados de probabilidad. Participaron 221 estudiantes universitarios, los cuales provienen de distintas instituciones públicas del Distrito Capital (Venezuela) y son cursantes de diferentes carreras universitarias. En particular hay estudiantes de Educación mención Matemáticas. A los participantes se les administró un instrumento escrito, el cual consta de una pregunta dividida en dos partes. En la primera (selección múltiple) se les propone un problema relacionado con la formación de comités a partir de un cierto número de personas. El problema involucra razonamiento combinatorio y se les solicita a los participantes que razonen su respuesta. En la segunda parte se les pide que den argumentos para justificar la opción que escogieron en la primera parte.

Los autores analizan el problema, primero señalando para cada alternativa escogida su caracterización: Opción a) Los estudiantes que responden esta alternativa usan el sesgo de la disponibilidad de la muestra, debido a que creen que son mucho más los comités de dos personas que se pueden formar. Opción b) En este caso existe una pobre comprensión del problema, aunque también podría ser producto de un sesgo no identificado. Opción c) Correcta. Además de seleccionar la alternativa, se les pidió a los estudiantes justificar su elección. A partir de las razones entregadas se generaron las siguientes seis categorías: 1) Atención a grupos, 2) Cuestión de azar, 3) Razonamiento combinatorio, 4) Razón causal, 5) Eventos equiprobables y f) Atención a las personas. Los autores concluyen que entre los estudiantes universitarios que participaron en la investigación predomina el sesgo de la disponibilidad. Esto se evidencia tanto en las respuestas seleccionadas como en los argumentos entregados.

CAPÍTULO III: DISEÑO METODOLÓGICO

> *Si la ley del conocimiento cuantitativo podía describirse en la doble medida de lo numerable en lo numeroso, en el caso del conocimiento cualitativo puede encontrase en la observación de "objetos" codificados, que por lo mismo hay que "traducir"* (Canales, 2006, p. 19).

1. Enfoque metodológico

La presente investigación, con fines exploratorios y descriptivos, utilizó una metodología cualitativa bajo un abordaje esencialmente interpretativo. La elección de este diseño estuvo fundamentada en el interés de realizar un trabajo en profundidad con un grupo de profesores, para develar sus concepciones en torno al azar y las probabilidades. Interesó abordar la dimensión subjetiva de los investigados, lo que permite la emergencia del hablar, o el significar social según Canales (2006). El mismo autor señala que como investigación cualitativa, el movimiento se produce en el orden de los significados y sus reglas de significación.

> *"En cada caso, se trata de un intento de comprensión del otro, lo que implica no su medida respecto de la vara del investigador, sino propiamente la vara de medida que le es propia y lo constituye"* (Canales, 2006, p.20).

Por lo anterior, valió aquí plantear una perspectiva más interpretativa centrada en el entendimiento del significado de las acciones (Hernández; Fernández y Baptista, 2006). Por otra parte, la presente investigación se constituye en un estudio exploratorio, dentro del ámbito nacional, dado que en Chile - acorde a la literatura revisada a la fecha y a diferencia de otros países como España[1] - no hay registro de una línea de investigación en relación a las concepciones de profesores acerca de las nociones de azar y probabilidades.

[1] Azcárate (1995) y Cardeñoso (2001), entre otros.

2. La muestra de sujetos

En el ámbito cualitativo esta investigación se acoge a la definición de muestra entregada por Canales (2006). La **muestra cualitativa** se entiende a partir del hecho de que cada participante es distinto a los otros, y representa una perspectiva diferenciada, dentro de la visión común que el grupo reúne. En este contexto se habla de una muestra intencionada, la cual no es elegida siguiendo las leyes del azar, sino de alguna manera intencional acorde a los fines de la investigación (Ruíz, 2003). Por ello, se impone la profundidad sobre la extensión y la muestra se reduce en su amplitud numérica, explicitando los criterios de su escogencia (Martínez, 2006). El muestreo se orienta a la selección de aquellas unidades y dimensiones que garanticen mejor: a) la cantidad (saturación) y b) la calidad (riqueza) de la información (Andréu Abela, 2001). Este último autor señala que este tipo de muestreo acepta que el número de sujetos pueda ser alterado a lo largo de la investigación, según sus objetivos y el curso que vaya siguiendo.

Este estudio también adopta el concepto de **saturación** según Canales (2006), que permite cerrar la muestra y señalar la representatividad de ésta, en relación al conjunto social investigado. La muestra termina de diseñarse cuando el análisis finaliza, es decir, cuando no hay nuevos elementos o información que se pueda aportar.

Acorde a los objetivos del presente trabajo, la investigación se realizó en un solo establecimiento el cual accedió a que sus docentes de matemática participaran. Las características[2] del **colegio** se detallan en el siguiente cuadro.

Cuadro 3.1: Información sobre el establecimiento.

Dependencia:	Particular con financiamiento compartido
Área:	Urbano
Ubicación:	R. Metropolitana – Comuna de Puente Alto
Nivel de enseñanza:	Educación Parvularia

[2] Información obtenida en http://masinformacion.mineduc.cl/

	Enseñanza Básica Enseñanza Media Humanista - Científica
Matricula total:	Aprox. 3 mil alumnos
Promedio de alumnos por curso:	38
Pago mensual por alumno:	25 mil a 50 mil
Nivel socioeconómico	Medio
Énfasis del proyecto educativo	Excelencia académica Desarrollo integral Preparación para la PSU e ingreso a la Universidad
Orientación	Laica

La **muestra de sujetos** quedó formada por docentes que enseñaban (o habían enseñando) matemática en segundo ciclo básico (5° a 8° básico) o niveles cercanos. Finalmente, el grupo que participó lo constituyeron 9 profesores. En este grupo había tanto docentes de enseñanza básica (4) como docentes de enseñanza media (5). Estos sujetos formaban parte del Departamento de Matemática, coordinado por uno de los docentes (profesor de media) que también participó de la investigación.

Los docentes participantes, en mayor o menor grado, tuvieron en su formación inicial cursos o módulos de Estadística y Probabilidades. No obstante, esta formación claramente fue más extensa en los profesores de enseñanza media, ya que en el caso de los profesores básicos fueron módulos de algunos meses y orientados principalmente a la Estadística. Por otra parte, los profesores de media en general tenían su grado de Licenciado y título de Profesor de Matemática (un caso es profesor de Matemática y Física), mientras que los profesores básicos contaban con la Pedagogía General Básica más un postítulo en Matemática.

Respecto a cursos de actualización en Estadística y Probabilidades, algunos los habían realizado recientemente en forma presencial o virtual (no más de un curso), otros simplemente no habían tenido perfeccionamiento. Con relación a la enseñanza de la Probabilidad y Estadística en aula, la mayoría de los profesores de media señalaba que había realizado clases en estos tópicos, mientras que los profesores básicos tenían más experiencia con la Estadística. Por su parte, los años de docencia en aula variaban desde 5 a 24 años. Finalmente, el rango de atención de cursos de los docentes básicos era de 5° a 8°, mientras que en el caso de los docentes de media era de 7° a IV° Medio.

Como el trabajo era en equipo, dadas las actuales exigencias curriculares[3], que proponen la enseñanza de las Probabilidades desde 5° básico, los profesores de enseñanza media debían realizar un fuerte apoyo en estas materias a los profesores de básica. En algunos casos, ellos mismos deberían enseñar estos tópicos en segundo ciclo, según lo señalado por el coordinador de departamento que fue entrevistado. A continuación se resume la información académica de los profesores participantes.

Cuadro 3.2: Información académica de los docentes que participaron en la investigación.

Prof.	Título Profesional y Grados	Formación inicial en probabilidad y estadística	Niveles que enseña o ha enseñado	Años de docencia	Capacitación en estadística y probabilidad	Ha enseñado estadística y probabilidad
S1	Licenciatura en Educación Matemática/ Pedagogía en Matemática	Ambos	7° a IV° Medio	9 años	NO	Ambos
S2	Profesor de Física y Matemática	Ambos	I° a IV° Medio	21 años	NO	NO
S3	Profesor de Educación Básica/ Mención Matemática	Ambos	5°, 6° y 7° básico	10 años	SI	Ambos
S4	Profesor de Matemática	Ambos	7°, 8° y I° Medio	24 años	SI	Ambos
S5	Profesora de Educación Básica/ Postítulo en Educación Matemática	Ambos	4°, 5° y 7° básico	5 años	SI	NO

[3] Los Decretos que promulgan este ajuste curricular para la Educación Básica (Decreto N° 256) y Media (Decreto N° 254) fueron publicados en el Diario Oficial de la República de Chile con fecha 19 – 08 – 2009.

S6	Profesor de Matemática	Ambos	7°, 8° y I° Medio	9 años	NO	Ambos
S7	Licenciatura en Educación Matemática/ Pedagogía en Matemática	Ambos	7° a II° Medio	14 años	SI	Ambos
S8	Profesor General Básico/ Postítulo en Matemática 2° ciclo	Estadística	5°, 6° y 7° básico	9 años	SI	Estadística
S9	Profesor General Básico/ Postítulo en Matemática 2° ciclo	Ambos	6°, 7° y 8° básico	20 años	NO	Estadística

3. Técnicas e instrumentos de recolección de datos

En este estudio se asume el postulado de la subjetividad, "*como condición y modalidad constituyente del objeto, que observa desde sus propias distinciones y esquemas cognitivos y morales*" (Canales, 2006, p.21). Por lo mismo, la apertura de los instrumentos - a la escucha – es el modo de cubrir la propia complejidad y forma del objeto.

En lo que se refiere al estudio de concepciones (en este caso acerca de los tópicos de azar y probabilidades), siguiendo las recomendaciones de Pozo et al. (2006), ellas no pueden ser abordadas únicamente mediante entrevistas o cuestionarios directos. Por el contrario, deben ser inferidas a partir de métodos indirectos (tareas de resolución de problemas, de clasificación, etc.), o bien a través de una integración de variados métodos con el mismo fin. Por lo anterior, las técnicas e instrumentos de recolección de datos fueron: grupos focales, cuestionario con preguntas abiertas y entrevistas.

3.1. Grupos focales

Este estudio se propuso la realización de **grupos focales** con la muestra de sujetos, fundamentalmente por las características de este tipo de técnica para recoger datos, señaladas por Canales (2006). Entre otras, el que la dirección está ejercida principalmente por el investigador, a diferencia de los grupos de discusión. Por otra parte, de lo que se habla en el grupo focal es de lo vivido como actor en una situación. Por lo mismo, tiene por objeto el análisis e interpretación de los sentidos de la acción, el sentido práctico individual. Este método permite inferir o hacer hipótesis acerca de los saberes con que los actores se orientan en sus acciones con relación a sí mismos y a otros actores. En otras palabras, lo que se abordan son las tramas de pre comprensiones en la acción (Canales, 2006).

Finalmente, con los profesores se acordó realizar tres sesiones de grupos focales, con la intención de discutir la mayor cantidad de ítemes del cuestionario abierto. Cada sesión de grupo focal fue registrada en grabadora de audio digital MP3 y luego transcrita. Por otra parte, también se contó con la presencia de un **segundo observador**, el cual registró las ideas más importantes de la conversación y la dinámica de la interacción. Cabe destacar, que el trabajo fue realizado durante tres viernes seguidos, en el espacio que ellos tenían para reuniones de departamento y también para instancias de capacitación docente.

3.2. Cuestionario

Para llevar a cabo los grupos focales, se utilizó como apoyo un **cuestionario** con ítems abiertos (ver en **Anexos**) con diversos temas relacionados con el azar y las probabilidades. El cuestionario fue construido tomando como base los instrumentos utilizados por Azcárate (1995) y Azcárate et al. (1998), más la consideración de otros trabajos tales como Soto (2000), Araya (2000), Barragués et al. (2005), Saavedra (2005), Ortiz et al. (2006), Salcedo y Mosquera (2008), Liu y Thompson (2007), acorde a las necesidades de la presente investigación.

El cuestionario fue sometido a la validación de **expertos**, en los términos descritos por Canales (2006). Dichos expertos analizaron el instrumento a partir de su experiencia y conocimientos. En este proceso participaron cinco profesionales, cuya situación académica y laboral se describe a continuación:

Cuadro 3.3: Información académica y laboral de los profesionales evaluadores

Profesional	**Título profesional/ Postgrado**	**Desempeño actual**
1	Doctor en Matemática. Universidad de Chile.	Investigador en el *CMM* – U. de Chile
2	Profesor de Matemática.	Profesor de enseñanza media/ Coordinador de departamento. Colegio Santa María de Santiago.
3	Ph. D. Curriculum and Instruction. Mathematics Education. New Mexico State University.	Investigación y desarrollo. *Fun Learnig Technologies.*
4	Magister en Didáctica de la Matemática. Universidad Autónoma de Barcelona.	Profesor de enseñanza media. Instituto Alonso de Ercilla. Coordinador de Postítulos en la Universidad Diego Portales. Profesor en la Universidad Academia de Humanismo Cristiano.
5	Profesor de Matemática y Computación.	Estudiante de Magister en Estadística Experimental. *New Mexico State University*.

Para el cuestionario, se evaluaron aspectos tales como: claridad, pertinencia, si el ítem era matemáticamente correcto y también el nivel de dificultad (Ver pauta en **Anexos**). Frente a cada ítem los evaluadores registraron las categorías de A (Aprobado), AR (Aprobado con reparos) y R (Reprobado). El análisis y consistencia de las respuestas puede ser revisado en los **Anexos**. Se siguieron las recomendaciones de Corral (2009) y Ruiz (2011) para tomar decisiones respecto a qué ítems mantener, modificar o eliminar. A partir de las observaciones de los expertos, el cuestionario fue mejorado y dejado en su forma definitiva (Ver **Anexos**).

3.3. Caracterización de los contextos de las situaciones y fenómenos utilizados en las preguntas del cuestionario

Respecto a los contextos de las situaciones utilizadas en los ítemes del cuestionario, éstos cubren un espectro que considera situaciones tales como el juego u otras conocidas, en las que los sujetos a partir de su experiencia tienden a poner en funcionamiento el razonamiento probabilístico (Nisbett, 1983; citado en Azcárate, 1996). Los fenómenos o situaciones que Azcárate propone son las siguientes:

- Fenómenos cuyos resultados están claramente provocados por algún mecanismo asociado con el azar, en los que el papel del azar es notable (aquellos relacionados con los juegos de azar).

- Fenómenos que culturalmente se identifican como impredecibles e incontrolables (por ejemplo, el tiempo atmosférico).

- Eventos relacionados con tiempos pasados, que si bien no podrían ser considerados como estrictamente aleatorios, su confirmación o no sí dependería del grado de información del sujeto (por ejemplo, fenómenos atmosféricos ocurridos en el pasado).

- Situaciones reales y cotidianas, cuyo control total no es posible dada la gran complejidad de su funcionamiento (germinación de una semilla, enfermarse de gripe o el control sobre las propias ideas). En general, culturalmente estos fenómenos se consideran como procesos causales y factibles de control.

Para efectos de esta investigación los contextos se redujeron a dos tipos:

- **Situaciones de juego**. Todo lo que tenga que ver con actividades que propongan el uso de dados, monedas, bolas, fichas, cartas, ruletas, etc., en situaciones lúdicas donde el papel del azar es claro. Se consideran aquí también aquellos contextos de situaciones típicas que requieren de combinatoria y/o probabilidad para resolverlas. Por ejemplo, paseos al azar, trayectos posibles en arreglos rectangulares, juegos de azar, etc.

- **Situaciones reales y cotidianas**. Incluye fenómenos meteorológicos, eventos naturales y cotidianos tales como la germinación de una semilla, adquirir una enfermedad, nacimientos, control sobre las propias ideas, prender un interruptor, etc. Caben aquí también aquellos contextos cotidianos de situaciones problemáticas que requieren de razonamiento proporcional, combinatoria y/o probabilidad para resolverlas. Por ejemplo, el caso de la formación de comités, información de encuestas sobre clientes, muestreo en control de calidad de productos, resultados de un test médico, etc.

En concordancia con los resultados de Azcárate (1995) y Cardeñoso (2001), a partir de las semejanzas, diferencias y hasta contradicciones de las justificaciones de los docentes, fue posible obtener información sobre la conceptualización de la aleatoriedad, el azar y las probabilidades y la influencia que el contexto tiene en ella. Los fenómenos o sucesos que representan cada cuestión reflejan características diferentes, no solo a nivel de contexto, sino también en relación con aspectos internos de la situación. Por ejemplo: espacio muestral, equiprobabilidad y predicción sobre su ocurrencia.

En el siguiente cuadro se presentan las características de las situaciones que forman parte del **ítem 1**, en el cual se trata la consideración de la aleatoriedad en los fenómenos.

Cuadro 3.4: Características de las situaciones del ítem 1

Ítem	Hecho	Contexto	Espacio muestral	Equiprobabilidad	Tiempo
1.1	La germinación de una semilla plantada.	Real/ cotidiano	Sí/No	No	Futuro
1.2	El número que se obtiene al lanzar un dado de seis caras.	Juego	1-6	Sí	Futuro

1.3	Acertar al número que se obtiene al lanzar un dado de seis caras.	Juego	Sí/No	No	Pasado
1.4	La cantidad de caras que se obtienen en 100 lanzamientos de una moneda.	Juego	0-100	No	Futuro
1.5	Llovió en Santiago el 3 de abril de 2009	Real/ cotidiano	Sí/No	No	Pasado
1.6	Lloverá mañana en Santiago	Real/ cotidiano	Sí/No	No	Futuro
1.7	Lloverá en Santiago dentro de un mes	Real/ cotidiano	Sí/No	No	Futuro
1.8	La próxima idea que se te venga a la cabeza.	Real/ cotidiano	Indefinido	No	Futuro
1.9	Enfermarse con gripe o influenza el mes que viene.	Real/ cotidiano	Sí/No	No	Futuro

En concordancia con lo propuesto por Azcárate (1995), en el siguiente cuadro se presentan las características de las situaciones que forman parte del **ítem 3**, en el cual se trata por una parte la consideración de la aleatoriedad y por otro la cuantificación o grado de ocurrencia del fenómeno, acercándose de esta manera al concepto de probabilidad y su posible tratamiento.

Cuadro 3.5: Características de las situaciones del ítem 3

Ítem	Hecho	Contexto	Tratamiento posible
3.1	Obtener un sello al tirar una moneda honesta o sin trucar, después de haber obtenido una secuencia de cuatro caras seguidas.	Juego	Laplaciano/Frecuencial
3.2	Encender la luz al pulsar el interruptor.	Real/ cotidiano	Frecuencial/Subjetivo
3.3	No enfermarse de gripe o influenza el mes que viene.	Real/ cotidiano	Subjetivo
3.4	Obtener suma igual a 7, al lanzar dos dados de seis caras no cargados.	Juego	Laplaciano/Frecuencial
3.5	Que nieve este invierno en Santiago.	Real/ cotidiano	Frecuencial/Subjetivo
3.6	Que llueva mañana en Santiago.	Real/ cotidiano	Frecuencial/Subjetivo

En concordancia con lo propuesto por Azcárate (1995), pero además agregando un número mayor de situaciones, en el siguiente cuadro se presentan las características de los **ítems 5 a 28**, en los cuales se indaga sobre las formas de razonamiento que utilizan los docentes al momento de enfrentar problemas (situaciones) que involucran probabilidades y el tratamiento conceptual que dan justamente a la noción de probabilidad.

Cuadro 3.6: Características de las situaciones de los ítems 2 y 5 a 28

Ítem	Hecho	Contexto	Aspecto conceptual
2	Secuencia aleatoria	Juego	Noción frecuencial de la probabilidad
5 a 6.3	Lanzamiento (simulación) de monedas, dados y ruletas repetidas veces.	Juego	Noción frecuencial de la probabilidad
7 a 9	Lanzamiento sucesivo de una moneda/ Lanzamiento de tres monedas.	Juego	Regla de Laplace/ Eventos compuestos
10	Juego con dados.	Juego	Regla de Laplace.
11.a.	Situación atmosférica.	Real/ cotidiano	Noción frecuencial de la probabilidad.
11.b.	Encuesta.	Real/ cotidiano	Noción frecuencial de la probabilidad.
12	Formar comisiones.	Real/ cotidiano	Razonamiento combinatorio.
13	Nacimientos.	Real/ cotidiano	Noción frecuencial de la probabilidad.
15	Juego con cartas.	Juego	Regla de Laplace.
17	Esquemas y trayectos.	Juego	Razonamiento combinatorio.
18	Caminos aleatorios.	Juego	Regla de Laplace/Eventos compuestos.
19.a - 19.b	Extracción de fichas y bolas.	Juego	Regla de Laplace.
20	Extraer bolitas.	Juego	Regla de Laplace/Eventos compuestos.
21	Lanzamiento de un dardo.	Juego	Regla de Laplace.
22	Tomar una muestra de ampolletas.	Real/ cotidiano	Razonamiento proporcional.
23	Extracción de fichas.	Juego	Regla de Laplace.
24	Concurso de TV.	Juego	Probabilidades/Riesgo.
25	Juego de azar con premios.	Juego	Razonamiento combinatorio.
26 - 27	Fichas y cartas con figuras.	Juego	Probabilidad condicional.
28	Encuestas de clientes.	Real/ cotidiano	Probabilidad condicional.

3.4. Entrevistas

En este estudio interesó la realización de **entrevistas en profundidad** con algunos sujetos de la muestra seleccionada, acorde a la definición de este instrumento entregada por Canales (2006). La entrevista en profundidad debe entenderse como una técnica social que pone en comunicación directa "cara a cara" al investigador con el entrevistado, con el cual se establece una relación peculiar de conocimiento que es *"dialógica, espontánea, concentrada y de intensidad variable"* (p. 220). Lo que interesó establecer fue una interacción, en lo posible, con preguntas abiertas y relativamente libres, por medio de las cuales se orientó el proceso para obtener información a partir de las respuestas del entrevistado.

> *"La naturaleza de la información que se produce en una entrevista en profundidad es de carácter cualitativo debido a que expresa y da curso a las maneras de pensar y sentir de los sujetos entrevistados, incluyendo todos los aspectos de profundidad asociados a sus valores, motivaciones, deseos, creencias y esquemas de interpretación que los propios sujetos bajo estudio portan y actualizan durante la interacción de la entrevista […]"* (Canales, 2006, p. 220).

En cuanto al grado de estructuración de la entrevista, se escogió la modalidad de entrevista **estandarizada abierta**, en los términos de Canales (2006), la que también se conoce como entrevista **semi-estructurada**. Acorde a esto se elaboró una pauta de preguntas ordenadas y redactadas, pero de respuesta abierta o libre. Se preparó un conjunto de preguntas como base, haciendo algunas modificaciones considerando si el entrevistado es profesor de básica o profesor de enseñanza media (ver en **Anexos**).

En concreto, interesó recabar más información en cuanto a las concepciones que sostienen los docentes en relación al azar y las probabilidades. Además se indagó sobre las "razones" por las que respondieron (en los ítems del cuestionario abierto) de una u otra forma. Las entrevistas fueron útiles además para validar la información obtenida en los grupos focales. Los entrevistados fueron dos profesores de enseñanza media y dos profesores de enseñanza básica. Para la aplicación de las entrevistas se contó con grabadora digital MP3 para registrar cada detalle de la conversación. Finalmente, cada sesión fue transcrita.

4. Triangulación como criterio de validación

El concepto de triangulación que ha impulsado durante años el enfoque cualitativo, se refiere a la triangulación de fuentes para verificar los datos: "*Triangulación de métodos para recabar datos*" (Hernández, Fernández y Baptista, 2006, p.789). No obstante, convencionalmente se asume que la triangulación es la aplicación de múltiples métodos en una investigación. Sin embargo, esta definición es genérica ya que es solo una forma de la estrategia. La triangulación debe ser concebida envolviendo variedades de datos, metodologías, investigadores y teorías (Denzin, 1989; citado en Flick, 2004).

Lo importante es que la triangulación como técnica impide que se acepte fácilmente la validez de las primeras percepciones, de modo que se amplía el ámbito, la densidad y la claridad de los constructos desarrollados a lo largo de la investigación (Goetz y LeCompte, 1988; citado en Parra, 2005). La triangulación puede concebirse como un proceso de múltiples percepciones con el propósito de clarificar el sentido, donde se verifica la repetición de la observación (Flick, 1992; citado en Espasandin Lopes, 2004).

En el caso de la presente investigación la triangulación ha ocurrido según la utilización de más de una técnica o instrumentos para recolectar datos (grupos focales, cuestionario abierto y entrevistas), participación de un segundo observador en los grupos focales, además del contraste de los resultados con la propia teoría.

5. Análisis cualitativo

Dada la estructura de los instrumentos y técnicas utilizadas, los datos recogidos son fundamentalmente de naturaleza cualitativa. Las **unidades** básicas de información corresponden a las respuestas (texto) de los docentes consideradas en su totalidad. Por lo mismo, se propuso realizar un **análisis cualitativo categorial** y de **contenido**, en los términos de Azcárate (1996).

En los análisis cualitativos, según Martínez (1996), en estricto rigor no hay categorías preconcebidas. Ellas deben emerger del estudio de los datos que se recojan. Sin embargo, el mismo autor señala que es posible partir de un grupo de categorías preestablecidas, con tal de que se utilicen provisionalmente hasta que se confirmen. Reforzando esta idea los autores Goetz y LeCompte (citados en Azcárate, 1996) señalan que: "*Estas categorías o grupos pueden ser elaborados a partir de la inspección de los datos o bien haberse establecido con anterioridad a la fase de recogida de datos, por su relevancia a priori para la investigación*" (p. 74).

5.1. Codificación y categorización

La codificación y categorización son aspectos de una misma actividad. Acorde a Rodríguez, Gil y García (citado en Osses, Sánchez e Ibáñez, 2006) hay diferencias entre estos conceptos. Por una parte, la **categorización**, hace posible clasificar conceptualmente las unidades que son cubiertas por un mismo tópico. Las categorías tienen un significado o tipo de significado y pueden referirse a situaciones, contextos, actividades, acontecimientos, relaciones entre personas, comportamientos, opiniones, sentimientos, perspectivas sobre un problema, métodos, estrategias, procesos, etc. (Osses et al., 2006). La **codificación**, en cambio, es la operación concreta por la que se asigna a cada unidad un indicativo (código) propio de la categoría en la que se considera incluida. Los códigos, que representan a las categorías, consisten en marcas que se añaden a las unidades de datos, para indicar la categoría a que pertenecen. Estas marcas pueden tener un carácter numérico o visual (colores), haciendo corresponder cada número o color con una categoría concreta, aunque es más frecuente utilizar palabras o abreviaturas de palabras con las que se han etiquetado las categorías (Osses et al., 2006).

Existen tres procesos diferentes en la elaboración del sistema de categorías: **deductivo**, **inductivo** y **deductivo-inductivo** (Osses et al., 2006). En el primero, se parte de un marco teórico para la conceptualización y amplitud de las categorías. En el segundo, se parte de registros narrativos, cuadernos de campo, grabaciones, etc. y, a partir de ese material, se extraen los rasgos que serán agrupados en función de la semejanza de ciertas características, pertinentes al objeto de investigación. En el tercer proceso a seguir para la elaboración del sistema de categorías, se parte de un marco teórico para definir las macrocategorías y, posteriormente, se procede a la elaboración de listas de rasgos extraídos a partir de los registros que se realizan en el contexto natural (Osses et al., 2006).

5.2. Metodología deductiva - inductiva

La presente investigación utilizó una metodología **deductiva – inductiva**, acorde a la descripción de Osses et al. (2006). Es decir, se partió con un conjunto de categorías pertenecientes a estudios previos tales como los de Azcárate (1995) y Cardeñoso (2001). No obstante, el sistema definitivo de categorías tiene características mixtas, pues a las categorías iniciales se agregaron otras que emergieron del propio estudio.
La metodología seguida para la identificación y validación de categorías fue la siguiente. En primer lugar, se separó el texto en **unidades espaciales** mediante números (líneas del texto) y unidades temáticas que se señalaron con letras (conversaciones, sucesos, actividades que ocurren en un momento), y permitieron encontrar segmentos referidos a un mismo tema. En este primer momento de codificación, se optó por combinar dos criterios en el proceso de separación de unidades en el texto: **unidades de registro** (temáticas que comportan una misma idea) y **unidades de enumeración** (líneas). Cabe mencionar que para apoyar todo este trabajo se recurrió a la **planilla Excel**, usando la herramienta “filtros”.

Se agruparon las unidades de datos a fin de identificar en ellos, componentes temáticos que permitieran organizar las categorías de contenido. Este proceso se denomina **codificación abierta** (Strauss, 1987; Strauss y Corbin, 1990; citados en Osses et al., 2006). Consiste en dar una denominación común (código más abstracto) a ciertos fragmentos. A continuación, estas categorías fueron definidas operacionalmente, lo que permitió además, distinguir sub-categorías, operación denominada **codificación axial** por los mismos autores.

5.3. Categorías previas del estudio, desde la teoría

Acorde con Azcárate (1995) la comprensión de la noción de Probabilidad se muestra al menos en dos niveles, el instrumental y el conceptual. El aspecto instrumental se utiliza para realizar cálculos dirigidos a la asignación de valores en la estimación de la probabilidad de un suceso incierto, según una u otra aproximación conceptual. Pero también este aspecto de medida de la incertidumbre de una situación conlleva el uso instrumental como útil para comparar la incertidumbre entre dos fenómenos (Cardeñoso, 2001).

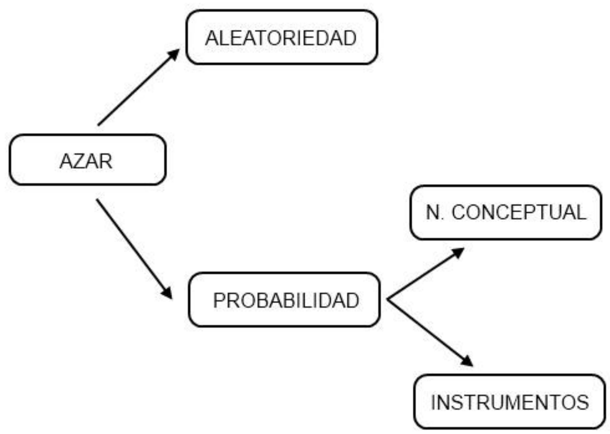


Figura 3.1: Estructura para el sistema de Categorías según Azcárate (1995).

En términos de Cardeñoso (2001), las nociones de aleatoriedad y probabilidad pueden ser reorganizadas desde otra perspectiva. Se puede considerar la aleatoriedad como una magnitud que caracteriza a la incertidumbre del fenómeno y la probabilidad como su medida relativa, ordinalmente considerada, del grado de certeza en la verificación de un evento.

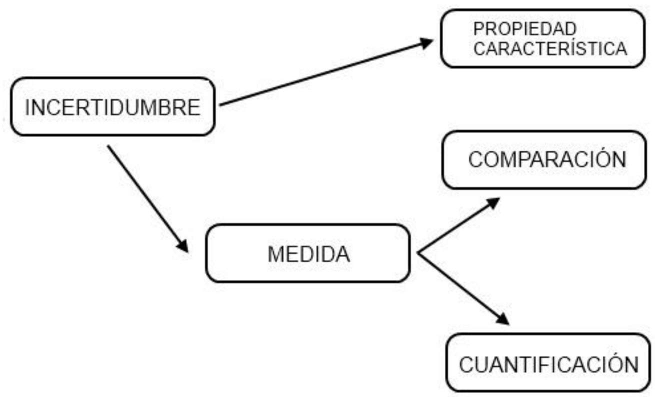


Figura 3.2: Estructura para el sistema de Categorías según Cardeñoso (2001).

A partir de los estudios de Azcárate (1995) y Cardeñoso (2001) se propusieron un conjunto de categorías previas, con el objetivo de ponerlas a prueba con los datos recogidos en la presente investigación y de este modo comenzar a realizar el análisis de contenido.

Cuadro 3.7: Sistema de categorías previas

Código	**Nombre**	**Descripción**
CAT 1	Determinismo	CAT 3 (Azcárate, 1995). Argumentaciones basadas en el no - reconocimiento del suceso como aleatorio o producto del azar, justificándolo como suceso determinista.
CAT 2	Incertidumbre	CAT 6 (Azcárate, 1995) y CAT 3 (Cardeñoso, 2001). Argumentaciones en las que se utiliza como criterio de reconocimiento del azar o de la aleatoriedad la propia imprevisibilidad del suceso, sin profundizar en su explicación o análisis.
CAT 3	Causalidad	CAT 13 (Azcárate, 1995) y CAT 1 (Cardeñoso, 2001). Argumentaciones que tienen como criterio de reconocimiento de la aleatoriedad explicaciones en función de diversos factores causales o en la ausencia de posibilidad de control.
CAT 4	Multiplicidad	CAT 14 (Azcárate, 1995) y CAT 2 (Cardeñoso, 2001). Argumentaciones que tienen como criterio de reconocimiento de la aleatoriedad la existencia de múltiples posibilidades en el desarrollo del fenómeno.
CAT 5	Aditividad	CAT 8 (Azcárate, 1995). Justificaciones de la elección apoyadas en estrategias de comparación aditiva.
CAT 6	Proporcionalidad	CAT 7 (Azcárate, 1995). Justificaciones de la elección basadas en el uso de la proporcionalidad como estrategia de comparación.

CAT 7	Combinatoriedad	CAT 12 (Azcárate, 1995). Justificaciones de la elección basadas en un análisis combinatorio de los datos para su comparación.
CAT 8	Equiprobabilidad	CAT 11 (Azcárate, 1995) y CAT 8 (Cardeñoso, 2001). Argumentaciones en las que se utiliza como criterio de reconocimiento de la aleatoriedad o estimación de la probabilidad la equiposibilidad entre los resultados del fenómeno.
CAT 9	Contingencia	CAT 5 (Cardeñoso, 2001). Argumentaciones estimativas de cuantificación de la probabilidad basadas en la comparación entre los casos favorables y desfavorables de un suceso.
CAT 10	Laplaciana	CAT 15 (Azcárate, 1995) y CAT 6 (Cardeñoso, 2001). Argumentaciones estimativas de cuantificación de la probabilidad basadas en la proporción entre los casos favorables y los casos posibles del fenómeno.
CAT 11	Frecuencial	CAT 5 (Azcárate, 1995) y CAT 7 (Cardeñoso, 2001). Argumentaciones estimativas de cuantificación de la probabilidad basadas en la lectura frecuencial del fenómeno o de la información aportada y el reconocimiento de regularidades o patrones.
CAT 12	Subjetiva	CAT 4 (Azcárate, 1995) - CAT 9 (Cardeñoso, 2001). Argumentaciones en las que se utiliza como criterio de reconocimiento de la estimación de la probabilidad consideraciones referidas a la propia vivencia o creencia subjetiva.
CAT 13	Aspectos Mágicos	CAT 17 (Azcárate, 1995). Consideraciones del azar como producto de lo desconocido, de lo oculto o de la suerte.

5.4. Categorías definitivas

A partir del análisis de los datos recogidos, finalmente se establecieron 14 categorías que se constituyen como un sistema mixto, pues validan por una parte un grupo de las propuestas por Azcárate (1995) y Cardeñoso (2001), pero también muestran otras que surgen de esta investigación. A continuación se muestra el sistema definitivo.

Cuadro 3.8: Sistema de categorías definitivo.

Código	Categoría	Sub-categoría	Descripción
CAT 1	Determinismo (no reconocimiento del azar o la aleatoriedad)		Argumentaciones basadas en el no - reconocimiento del suceso como aleatorio o producto del azar, justificándolo como suceso determinista (Azcárate, 1995; Cardeñoso, 2001).

CAT 2	Incertidumbre		Argumentaciones en las que se utiliza como criterio de reconocimiento del azar o de la aleatoriedad la propia imprevisibilidad del suceso, sin profundizar en su explicación o análisis (Azcárate, 1995; Cardeñoso, 2001).
CAT 3	Causalidad		Argumentaciones que tienen como criterio de reconocimiento de la aleatoriedad explicaciones en función de diversos factores causales o en la ausencia de posibilidad de control (Azcárate, 1995; Cardeñoso, 2001).
CAT 4	Multiplicidad de opciones o posibilidades		Argumentaciones que tienen como criterio de reconocimiento de la aleatoriedad la existencia de múltiples posibilidades en el desarrollo del fenómeno (Azcárate, 1995; Cardeñoso, 2001).
CAT 5	Subjetivo o experiencial	CAT 5A: Aleatoriedad desde la experiencia	Argumentaciones en las que se utiliza como criterio de reconocimiento de la aleatoriedad consideraciones referidas a la propia vivencia o creencia subjetiva. (Cardeñoso, 2001).
		CAT 5B: Probabilidad subjetiva	Argumentaciones en las que se utiliza como criterio de reconocimiento de la estimación de la probabilidad consideraciones referidas a la propia vivencia o creencia subjetiva. (Azcárate, 1995; Cardeñoso, 2001)
CAT 6	Equiprobabilidad		Argumentaciones en las que se utiliza como criterio de reconocimiento de la aleatoriedad o estimación de la probabilidad la equiposibilidad entre los resultados del fenómeno (Azcárate, 1995; Cardeñoso, 2001).
CAT 7	Laplaciana		Argumentaciones estimativas de cuantificación de la probabilidad basadas en la proporción entre los casos favorables y los casos posibles del fenómeno (Azcárate, 1995; Cardeñoso, 2001).
CAT 8	Frecuencial		Argumentaciones estimativas de cuantificación de la probabilidad basadas en la lectura frecuencial del fenómeno o de la información aportada y el reconocimiento de regularidades o patrones (Azcárate, 1995; Cardeñoso, 2001).

CAT 9	Condicionalidad	CAT 9A: Aproximación intuitiva a la condicionalidad	Argumentaciones intuitivas basadas en la lectura de aspectos que condicionan la probabilidad o en su estimación mediante gráficos o esquemas.
		CAT 9B: Formalización de la condicionalidad	Argumentaciones estimativas de cuantificación de la probabilidad condicional basadas en la utilización de fórmulas.
CAT 10	Razonamientos proporcionales		Justificaciones de la elección basadas en el uso de la proporcionalidad como estrategia de comparación (Azcárate, 1995)
CAT 11	Razonamientos aritméticos o aditivos		Justificaciones de la elección apoyadas en estrategias de comparación aditiva (Azcárate, 1995)
CAT 12	Razonamientos combinatorios	CAT 12A: Razonamientos combinatorios intuitivos o incompletos	Justificaciones de la elección basadas en un análisis combinatorio intuitivo, incompleto o incorrecto de los datos para su comparación (Azcárate, 1995).
		CAT 12B: Razonamientos combinatorios completos o formales	Justificaciones de la elección basadas en un análisis combinatorio completo o formal de los datos para su comparación (Azcárate, 1995)
CAT 13	Independencia	CAT 13A: Razonamientos que reconocen la independencia de sucesos	Argumentaciones que involucran el reconocimiento de la independencia de sucesos.
		CAT 13B: Razonamientos que aplican la independencia de sucesos	Argumentaciones de la cuantificación de la probabilidad en la que se reconoce que $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$ cuando A y B son independientes.
CAT 14	Azar como suerte o aspectos mágicos		Consideraciones del azar como producto de lo desconocido, de lo oculto o de la suerte (Azcárate, 1995)

CAPÍTULO IV: ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

"El razonamiento estocástico no es algo inmediato y dependiente exclusivamente del desarrollo de los individuos, sino que se construye progresivamente en interacción con el entorno. Dicho razonamiento parte de unas intuiciones iniciales que aparecen desde edades muy tempranas y que no evolucionan paralelamente al desarrollo lógico del sujeto" (Azcárate, 2006, p.4).

Con el propósito de responder a los objetivos de la presente investigación y a la pregunta: ¿Qué concepciones acerca del azar y las probabilidades expresan profesores de matemática, que realizan clases en los niveles de 5° a 8° básico, en un colegio de la comuna de Puente Alto?, se procedió, primeramente, a la ejemplificación de cada una de las **categorías** identificadas a partir de las respuestas registradas de los profesores. En segundo lugar, y como elemento central de esta investigación, se procedió a describir, interpretar y fundamentar cada una de las **concepciones** que los docentes sostienen en torno a la aleatoriedad, el azar y las probabilidades. Del mismo modo se describieron los **criterios** o estrategias de razonamiento que utilizan los docentes al momento de enfrentar problemas relacionados con probabilidad.

1. Categorías definitivas y ejemplos de respuestas

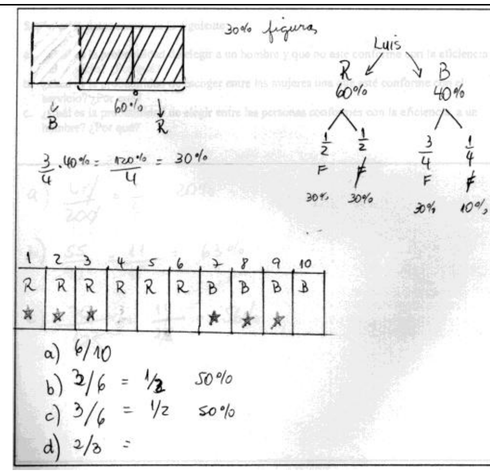
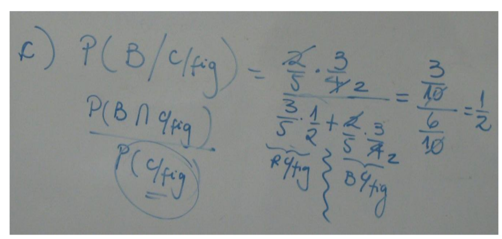
En el siguiente cuadro se presentan las categorías definitivas de la investigación y algunos ejemplos representativos de cada una de ellas.

Cuadro 4.1: Categorías de la investigación y ejemplos.

Código	Categoría	Sub-categoría	Ejemplos de respuestas
CAT 1	Determinismo (no reconocimiento del azar o la aleatoriedad)		*S8F1_L8: Yo creo que al ser algo no aleatorio es algo que yo sé… sé lo que va a suceder. Se lo que va a pasar (ítem 1.1, hace referencia a la germinación de una semilla).* *S2F1_L12: "no porque son fenómenos determinados". Yo determino, va a plantarla para que germine… Yo la riego, yo la planto… yo determino las condiciones (ítem 1.1. hace referencia a la germinación de una semilla).* *S3F1_L341: eh… que se determina… que se asocia a ciertas (interviene S7, que sé que va a ocurrir antes). Que va a ocurrir de acuerdo a*

			ciertas características… determinadas…
CAT 2	Incertidumbre		*S3F1_L15: No necesariamente va a germinar… la semilla puede germinar o morir. (ítem 1.1.-).* *S3F1_L21: Tener opciones de que algo resulte, no implica de que vaya a resultar. Por lo tanto, sigue siendo azaroso. Desde mi punto de vista. (Ítem 1.1.-).* *S1F1_L158: que no puedo obviamente determinar qué va a suceder, no puedo predecir…con exactitud.* *S5F1_L160: Estoy de acuerdo, un suceso no determinable. Si está bien…*
CAT 3	Causalidad		*S3F1_L6: Ya que el hecho de que se plante en un lugar u otro, va a favorecer que esta germine o no. Por lo mismo, No se tira una semilla, se tiran varias. (Ítem 1.1.-).* *S2F1_L122: claro si estoy en un lugar contaminado mis probabilidades de que enferme (aumentan) (ítem 1.9.-).*
CAT 4	Multiplicidad de opciones o posibilidades		*S8F1_L43: Si, por su puesto es aleatorio. Porque yo no sé cual de todas las opciones va a salir. Al tener yo un "suceso aleatorio" significa que yo no sé qué es lo que va a salir. No es seguro. (Ítem 1.2.-).* *S9F1_L45: No es seguro que salga el 1, que salga el 2… (Ítem 1.2.-).*
CAT 5	Subjetivo o experiencial	CAT 5A: Aleatoriedad desde la experiencia	*S4F1_L69: si yo lo he hecho… Yo lo he hecho, lo he hecho en clases y de mil… cuando los chicos lanzan y uno agrupa las soluciones y uno observa que con mil lanzamientos agrupándolo de 10 niños por lo menos…" (Ítem 1.4.-).* *S1F1_L70: cada uno lanza una cantidad y luego se agrupan los resultados… (Ítem 1.4.-).* *S1F1_L221: al jugar en la práctica… es una tendencia… En un experimento real de lanzar 50 veces no mostraría esa tendencia… Yo pienso que la secuencia 1 es la real (ítem 2).*
		CAT 5B: Probabilidad subjetiva	*S4F1_L225: De alguna manera tiene que ver con que uno ha experimentado en el "tiempo" cuando uno experimenta con los chicos … no les va saliendo cara, sello cada vez … eso no pasa en lo cotidiano . Siempre pasa o dos caras, o después tres sellos, después sello, cara (ítem 2).* *S7E1_L665: La probabilidad subjetiva es… pero eso, ¿pero subjetiva de pensar en que lo que yo*

			creo? Ponte tú porque yo la probabilidad de que me gane el loto es un hecho… ¿a eso se refiere con subjetiva?
CAT 6	Equiprobabilidad		*S1F1_L46: tienen la misma posibilidad. (ítem 1.2.-).* *S9F1_L64: Podría salir cara o sello. 50 y 50 (ítem 1.4.-).* *S4F1_L109: 50 y 50. Aleatorio. Puede ser que si, puede ser que no. (Ítem 1.9.-).* *S4F1_L284: No pos da lo mismo. Porque además es una moneda honesta.*
CAT 7	Laplaciana		*S2F1_L307: pero en el caso de la suma (igual a 7) es 1/6…* *S6F2_L441: 4 de 36… (Suma 5)* *S6F2_L444: Son 5 de 36… (Suma 6)* *S8F2_L728: Rojo es 2/3.* *S4F2_L999: Tú dices 2 de 3, porque tienes dos que tienen caras… (Rojas)*
CAT 8	Frecuencial		*S6F1_L212: porque juega mucho con el 50%.* *S6F1_L214: ganó, perdió, ganó, perdió…* *S6F1_L238: Yo creo que es como que se trata de mostrar resultados después de grandes cantidades de veces que se reproduce… por que cae a una tendencia del 50% que es lo que espera uno…*
CAT 9	Condicionalidad	CAT 9A: Aproximación intuitiva a la condicionalidad	*S3F3_L 631: ¿Qué? Pero las probabilidades condicionadas no son cuando – si me ponen una condición – y ¿debo ubicarme en la condición?* *S1F3_L 632: Ya pos la condición es dado que está dentro de la categoría… ¿Cómo se llama eso? La probabilidad de la intersección.*

			 Respuesta de sujeto S9 al ítem 27 en el cuadernillo.
		CAT 9B: Formalización de la condicionalidad	*S1F3_L 818: Porque la probabilidad de que sean con figuras son ¾… por 2/5 que sería el 40% de las blancas y eso partido por la (probabilidad) de figuras que es ¾* *S2F3_L 833: Abajo es la probabilidad de la condición y la condición es con figura…* *S1F3_L 838: Estoy haciendo la probabilidad de que sea blanca o con figuras dado que la probabilidad sea con figura…*  Aplicación de la fórmula para obtener el resultado, escrita en la pizarra el día de la sesión 3 de grupo focal
CAT 10	Razonamientos proporcionales		*S3E1_L499: Las 3000 ampolletas… El razonamiento fue… a ver… lo que hice fue… dividir la cantidad la cantidad… a grandes rasgos agrupar… si por cada… decía que de 300 ampolletas 100 fueron seleccionadas al azar… para realizar un control de calidad… Entonces yo fui haciendo grupos de 100… me daban 30 grupos de 100… Si de cada grupo de 100 se salían 5 ampolletas malas y… el razonamiento fue que si tenía 30 grupos… hice la multiplicación entre 30 x 5 y me da 150 ampolletas malas… que es probable que resulten dentro de las 3000.*

CAT 11	Razonamientos aritméticos o aditivos		*"Porque hay más cantidad de comités de 2 personas (10 en total) que de 8 (4 en total)"* (Respuesta de sujeto S3 al ítem 12 en el cuadernillo.)
CAT 12	Razonamientos combinatorios	CAT 12A: Razonamientos combinatorios intuitivos o incompletos	*S9F1_L434: Hay tres posibilidades de sumar siete…* *S3F1_L437: 6-1, 2-5, 4-3, 3-3,* *S6F2_L1134: ¡Ah! ya me di cuenta de que vendría siendo 1…. 8x 8 (S9: pero tenis que llegar a la última de las últimas filas)* *S3F2_L1135: Tenís que llegar 8X8* *S3E1_L508: Este fue el que no pude hacer…* *S3E1_L512: Claro. O sea las combinaciones con los 6 dígitos… era factible de hacer…* *S3E1_L513: Pero con 4 de 6…* *S3E1_L514: Pero con 4 de esos 6, porque con son cualquier 4. Nos son 1,2,3,4… sino que puede ser 1,2,4,5 … 1,2,5,6… entonces con esas combinaciones … ahí me vi complejo…complicado.*
		CAT 12B: Razonamientos combinatorios completos o formales	*S3F2_L523: Eh… primero la letra a) dice que considere que son dados no cargados y se calcula el producto entre ellos. Entonces yo fui mirando la probabilidad de que saliera par y de que saliera impar, en términos de las combinaciones. Yo sé que par x par da par, par x impar da par también, impar x par también da par, y que la única combinación que nos podía dar impar era que salieran dos números impares. Por lo tanto, dentro de eso la mayor probabilidad, siguiendo más menos el caso de allá es que eh… me salga un número par.* *S8F2_L506: Existen más posibilidades de sumar 6 que de sumar 5.* *S3F2_L1143: 8x8x8* *S3F2_L1145: 8 al cubo.* *S9F2_L1146: 512.* *S2F3_L496: Suma 7 = {(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)} (escribe en pizarra)* Combinatoria 1º grupo $C^{10}_{2} = \frac{10!}{2!\,8!} = 45$ // 2do grupo. $C^{10}_{8} = \frac{10!}{8!\,2!} = 45$ // Respuesta de sujeto S2 al ítem 12 en el cuadernillo.

CAT 13		CAT 13A: Razonamientos que reconocen la independencia de sucesos	*S7F1_L280: Pero son independientes…* *S9F1_L286: Es un hecho independiente.*
		CAT 13B: Razonamientos que aplican la independencia de sucesos	*S2F1_L263: Porque tengo la concepción de que las probabilidades de un suceso que se dé en forma simultánea las tengo que multiplicar…*
CAT 14	Azar como suerte o aspectos mágicos		*S1F1_L194: azar muchas veces se relaciona simplemente con la suerte* *S3F1_L196: el azar lo relacionan con la parte suerte. Se relaciona con la suerte pero en un término (como que na' que ver) más "demoniaco" del tema más…* *(Animador: o divino?) … Si pero por el lado malo, porque para eso existe lo que se denomina las "serendipias[1]"* *S1F1_L204: pero por eso decía que se usan en matemática como sinónimos… pero lo que es la vida cotidiana el azar siempre está más considerado más a la suerte… que son juegos de azar*

2. Una forma de analizar las concepciones, acorde a la definición adoptada para este estudio

Acorde a los objetivos planteados en esta investigación, ha sido de interés identificar y caracterizar las concepciones de un grupo de profesores acerca del azar, la aleatoriedad y la probabilidad. Además, se ha propuesto identificar y caracterizar algunos criterios y estrategias que utilizan los docentes frente a situaciones problemáticas que involucren azar y probabilidades.

[1] Una **serendipia** es un descubrimiento o un hallazgo afortunado e inesperado. Se puede denominar así también a la casualidad, coincidencia o accidente http://es.wikipedia.org/wiki/Serendipia. Otra definición es: "la capacidad de hacer descubrimientos por accidente y sagacidad, cuando se está buscando otra cosa. http://serendipia.zoomblog.com/archivo/2008/01/10/otra-Definicion-de-Serendipia.html

Como ya se ha descrito en el Capítulo III de Diseño Metodológico, los profesores participaron en tres sesiones de grupos focales en los que discutieron y analizaron diferentes ítemes (problemas) de un cuadernillo, acerca de temas como el azar y las probabilidades. A partir de las respuestas se han identificado las categorías y, a partir de ellas, se han develado las concepciones buscadas.

Cabe recordar que para efectos de este estudio, se ha entendido una concepción como: *"Una estructura general de pensamiento que incluye significados, conceptos, imágenes mentales, preferencias, reglas y creencias del profesor, tanto globalmente como sobre un determinado tópico, que condicionan la forma en que afrontan las tareas de la enseñanza. Estas se originan y desarrollan a través de las experiencias e interacciones con la realidad".*

Por lo mismo, ha de entenderse que cada una de las concepciones encontradas puede hacerse corresponder con aquellos elementos esenciales (dimensiones) que definen una concepción. En el siguiente cuadro se realiza el análisis con la primera concepción encontrada (C1):

Cuadro 4.2: Análisis de la concepción 1 según la definición adoptada.

Concepción:	**Negación del azar en fenómenos reales y cotidianos**.
Descripción:	"Negación de la dimensión aleatoria o azarosa en situaciones o fenómenos reales y cotidianos, argumentando su carácter determinista en la existencia de relaciones causales o condiciones que favorecen o no la ocurrencia del fenómeno. Esta concepción se expresa en la categoría CAT 1".
Significados:	Significa que todos los fenómenos cotidianos tienen causas, son consecuencia de otros fenómenos controlables.
Conceptos involucrados:	Determinismo, causalidad

Imágenes mentales:	Visión del azar desde el "discurso del Azar/Necesidad" o "doctrina de la necesidad", aludiendo a la existencia de una necesaria causalidad, o bien al "discurso de la ignorancia", en el cual el azar se transforma en una mera falta de información.
Preferencias:	La toma de decisiones de un sujeto está basada en el hecho de que el azar no existe.
Reglas y creencias:	Es posible efectuar un control sobre el fenómeno y, de esta manera, neutralizar el factor azar.

En el siguiente cuadro se realiza el análisis con la tercera concepción encontrada (C3), a favor de la aleatoriedad:

Cuadro 4.3: Análisis de la concepción 3 según la definición adoptada.

Concepción:	**Aleatoriedad y factores causales**
Descripción:	"Reconocimiento de la dimensión aleatoria o azarosa en situaciones o fenómenos reales y cotidianos, aludiendo a ciertas relaciones causales o condiciones que favorecen o no la ocurrencia de los fenómenos, o bien a la falta de control sobre dichos factores causales. Esta concepción se expresa en las categorías CAT 2 y CAT 3".
Significados:	Significa que todos los fenómenos reales y cotidianos, son consecuencia de otros fenómenos o causas sobre las que no se tiene control.
Conceptos involucrados:	Aleatoriedad, relaciones causales.
Imágenes mentales:	Existencia de presupuestos deterministas, al analizar los mecanismos causales subyacentes al fenómeno. Es decir, todo tiene una causa, todo está regulado, sin embargo, si hay un grado de desconocimiento de dichos mecanismos o una falta de control sobre ellos, se considera el fenómeno como aleatorio. En lo anterior hay elementos de una concepción que relaciona lo aleatorio con lo desconocido.

Preferencias:	La toma de decisiones de un sujeto está basada en el hecho de que el azar existe, pero a raíz de no tener un control de los mecanismos subyacentes al fenómeno.
Reglas y creencias:	Es posible identificar algunas causas que favorecen o no la ocurrencia del fenómeno, sin embargo, no es posible controlar los resultados finales.

Tal como se ha realizado con los dos ejemplos, el método permite analizar (desglosar) cada una de las concepciones en torno al azar, la aleatoriedad y las probabilidades. A continuación se describen cada una de las concepciones encontradas, además de los criterios para resolver problemas que involucran azar y probabilidades.

3. Caracterización e interpretación de las concepciones y criterios de razonamiento de los docentes

3.1. Concepciones acerca de la no aleatoriedad en los sucesos o fenómenos

Cabe destacar que los argumentos de los sujetos para la **no - aleatoriedad** o determinismo se dan, por lo general, en los contextos de situaciones reales y cotidianas, en particular fenómenos atmosféricos. No así en las situaciones de juego.

Concepción 1: “Negación del azar en fenómenos reales y cotidianos”

Negación de la dimensión aleatoria o azarosa en situaciones o **fenómenos reales y cotidianos**, argumentando su carácter determinista en la existencia de **relaciones causales** o **condiciones** que favorecen o no la ocurrencia del fenómeno. Esta concepción se expresa en la categoría **CAT 1**.

Interpretación:

En esto se revela el reconocimiento de relaciones causales directas sobre las que se puede efectuar un posible control sobre el fenómeno y, de esta manera, “neutralizar” el factor azar. Algunos ejemplos en los que se encuentra este tipo de concepción son los siguientes:

> *S2F1_L12: “no porque son fenómenos determinados”. Yo determino, va a plantarla para que germine… Yo la riego, yo la planto… yo determino las condiciones (ítem 1.1.-).*
>
> *S2F1_L20: “Yo determino las condiciones para que germine”. Pero aún así podría fallar, pero ya escapa al azar (una profesora apoya esto). Porque voy a tener más opción de que si resulte de que no (ítem 1.1.-).*

O bien en:

> *S5F1_L133: ¡Va! Depende de las condiciones (ítem 1.6.-).*
> *S2F1_L135: Porque si yo veo la presión, y veo todos los cambios que hay…(ítem 1.6.-).*

Además:

> *S8F1_L93: determinista yo creo (ítem 1.8.-).*
> *S2F1_L95: está preconcebido las cosas que tú sientas (piensas) (ítem 1.8.-).*

Lo anterior tiene que ver con la creencia de que es posible influir en el “azar” (Fischbein, Nello y Marino, 1991; Serrano, 1993; citados en Azcárate, 1995). También se puede interpretar que la concepción de fondo en este caso, al poder controlar los fenómenos, tiene que ver con una visión del azar desde el “discurso del Azar/Necesidad” o “doctrina de la necesidad”, aludiendo a la existencia de una necesaria causalidad. Por otro lado, también se puede ver esto acorde al “discurso de la ignorancia”, en el cual el azar se transforma en una mera falta de información (Cardeñoso, 2001; Serradó, Cardeñoso y Azcárate, 2005; Hacking, 2006).

<u>Concepción 2:</u> “Negación del azar en situaciones o fenómenos ya ocurridos”

Negación de la dimensión aleatoria o azarosa en situaciones o fenómenos **reales y cotidianos**, debido a que se trata de hechos ya ocurridos. No surge la necesidad de dar una opinión sobre ellos, o bien argumentar por el lado de la falta de información. Esta concepción se expresa en la categoría **CAT 1**.

Interpretación:

En situaciones "meteorológicas" que aluden a hechos pasados, los sujetos dan por sentado que se trata de algo "seguro" o "determinado", aún cuando personalmente no se tenga información sobre lo que realmente aconteció. Algunos ejemplos en los que se encuentra este tipo de concepción son los siguientes:

S8F1_L126: Está determinado. Por una fecha un lugar y un tiempo (ítem 1.5.-).
S9F1_L127: Llovió es pasado (otra profesora apoya) (ítem 1.5.-).
S9F1_L130: Es determinístico (ítem 1.5.-).

3.2. Concepciones acerca de la aleatoriedad en los sucesos o fenómenos

Concepción 3: "Aleatoriedad y factores causales".
Reconocimiento de la dimensión aleatoria o azarosa en situaciones o **fenómenos reales y cotidianos**, aludiendo a ciertas **relaciones causales** o **condiciones** que favorecen o no la ocurrencia de los fenómenos, o bien a la falta de control sobre dichos factores causales. Esta concepción se expresa en las categorías **CAT 2** y **CAT 3**.

Interpretación:

En este caso las justificaciones se basan en "presupuestos deterministas", al analizar los mecanismos causales subyacentes al fenómeno. Es decir, todo tiene una causa, todo está regulado, sin embargo, si hay un grado de desconocimiento de dichos mecanismos o una falta de control sobre ellos, se considera el fenómeno como aleatorio. Algunos ejemplos en los que se encuentra este tipo de concepción son los siguientes:

S3F1_L6: Ya que el hecho de que se plante en un lugar u otro, va a favorecer que esta germine o no. Por lo mismo, No se tira una semilla, se tiran varias. (Ítem 1.1.-).
S7F1_L25: No sabemos si están todas las condiciones (Ítem 1.1.-).
S4 F1_L31: Depende de las condiciones… (Ítem 1.1.-).

En las justificaciones dadas por los sujetos se detecta más una dependencia del estudio causal del fenómeno y, ante la ignorancia del funcionamiento del evento, consideran al fenómeno como aleatorio. En términos de Azcárate (1996), hay elementos de una concepción que relaciona el azar con lo "desconocido". Esto se aleja de una concepción más moderna del azar, en la que se considera la aleatoriedad de los fenómenos como algo intrínseco de la naturaleza, resultado de las múltiples relaciones complejas existentes (Discurso de la complejidad).

Otros ejemplos que aluden a relaciones causales o condiciones que favorecen la ocurrencia de un fenómeno son los siguientes:

> *S2F1_L122: Claro si estoy en un lugar contaminado mis probabilidades de que enferme (aumentan) (ítem 1.9.-).*
> *S2F1_L123: La muestra en que esté metido va a determinar si me enfermo o no. (Ítem 1.9.-).*
>
> *S6F1_L189b: Pero ese azar también se puede considerar en otros aspectos bajo ciertas condiciones que puede existir una probabilidad de que ocurra con más frecuencia o con menos frecuencia de acuerdo a las condiciones donde se esté plantando. Eso.*

<u>Concepción 4:</u> "Aleatoriedad y equiprobabilidad".

Reconocimiento de la dimensión aleatoria o azarosa en situaciones de **juego** y también en algunos **fenómenos reales y cotidianos**, aludiendo a la **equiprobabilidad** de los resultados, pero además en algunos casos revelando cierto grado de **incertidumbre**. Esta concepción se expresa en las categorías **CAT 6** y **CAT 2**.

Interpretación:

Este tipo de argumentaciones aparece, por lo general, en las situaciones de juego y no tan frecuentemente en las situaciones o fenómenos reales y cotidianos (Azcárate, 1995; Cardeñoso 2001). Lo que sucede es que en las situaciones de juego es relativamente sencillo cuantificar la posibilidad de ocurrencia de cada resultado.

Algunos ejemplos lúdicos en los que se encuentra este tipo de concepción son los siguientes:

> *S1F1_L46: (las caras del dado) tienen la misma posibilidad. (ítem 1.2.-).*
>
> *S9F1_L64: Podría salir cara o sello. 50 y 50 (ítem 1.4.-).*
>
> *S7F1_L281: Al lanzar una moneda… que salga cara o sello (Ítem 3.1.-).*
>
> *S4F1_L284: No pos da lo mismo. Por que además es una moneda honesta (Ítem 3.1.-).*

No obstante, se dio un par de respuestas en contextos reales que apuntan en cierto modo a la equiprobabilidad. Por ejemplo:

> *S3F1_L15: No necesariamente va a germinar… la semilla puede germinar o morir. (ítem 1.1.-).*

O bien:

> *S4F1_L109: (enfermase con gripe…) 50 y 50. Aleatorio. Puede ser que si, puede ser que no. (Ítem 1.9.-).*

En estos casos se consideran los resultados posibles como dicotómicos "germinar o morir", "enfermarse o no" con la misma probabilidad, esto es, equiprobables.

<u>Concepción 5:</u> "Aleatoriedad e incertidumbre"
Reconocimiento de la dimensión aleatoria o azarosa en situaciones o **fenómenos reales** y **cotidianos**, aludiendo al grado de **incertidumbre** respecto de los resultados. Esta concepción se expresa en la categoría **CAT 2**.

Interpretación:

En esta concepción los contextos involucrados son principalmente fenómenos reales y cotidianos. En el caso de las situaciones de juego, si bien se reconoce el grado de incertidumbre, en los argumentos hay un reconocimiento además del espacio muestral, por lo que de alguna manera la incertidumbre tiene un rango más definido.

Las explicaciones, en general, son respuestas cuyos argumentos son el reconocimiento de que el suceso no ocurre siempre, o al menos no siempre con los mismos resultados, y puede ser que no ocurra. Se ignora toda referencia a las causas que originan o pueden originar el fenómeno. Algunos ejemplos en los que se encuentra este tipo de concepción son los siguientes:

> *S3F1_L21: Tener opciones de que algo resulte, no implica de que vaya a resultar. Por lo tanto, sigue siendo azaroso. Desde mi punto de vista. (Ítem 1.1.-).*
>
> *S9F1_L32: Yo desconozco si todas las semillas germinan… (Ítem 1.1.-).*

O bien:

> *S1F1_L108: (Enfermarse de gripe…) No pues no es seguro. (Ítem 1.9.-).*
>
> *S1F1_L116: Enfermarse de gripe o influenza el mes que viene, es aleatorio. (Ítem 1.9.-).*

Además:

> *S1F1_L152: es sumamente variable, porque a veces te pueden decir que sí va a llover y no llueve. Y el instrumento falla. No hay una exactitud. Porque cambia, no es algo constante. (Ítem 1.6.-).*
>
> *S2F1_L153: (lloverá mañana…) no hay nada que se pueda determinar con exactitud. (Ítem 1.6.-).*

Respecto de los fenómenos aleatorios:

> *S1F1_L158: que no puedo obviamente determinar qué va a suceder, no puedo predecir…con exactitud.*
>
> *S5F1_L160: Estoy de acuerdo, un suceso no determinable. Si está bien…*
>
> *S6F1_L181: … la pregunta fue qué entiende por fenómeno aleatorio, por ejemplo, mi respuesta fue no se tiene certeza en el resultado… es lo único que puse... <u>que no hay certeza en el resultado</u>. Mientras yo no tenga certeza en el resultado, significa que hay azar.*
>
> *S9F1_L346: "Aleatoriedad: que algo sea azaroso, que sea improbable… que sea dudoso de suceder".*

Estas respuestas pueden considerarse idóneas, ya que esta es una característica propia de los sucesos aleatorios (Azcárate, 1995). No obstante, el asunto cambia cuando las respuestas relacionan esa incertidumbre con el azar (en el sentido de suerte o casualidad) y, por tanto, no se pueda prever su resultado o nada se pueda hacer. En este caso el azar se transforma en algo desconocido y, por lo tanto, “no controlable”. Por ejemplo, se tiene la siguiente respuesta de un sujeto en relación con los fenómenos aleatorios y el azar:

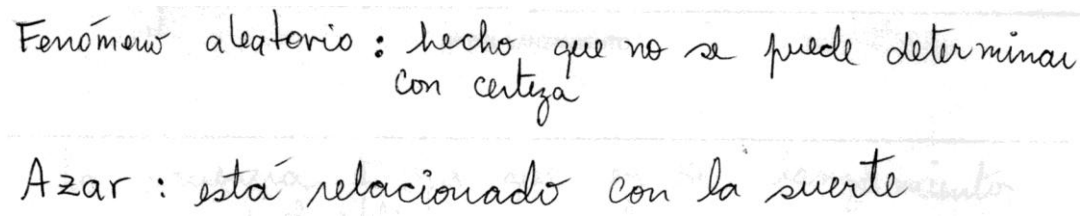

Fenómeno aleatorio: hecho que no se puede determinar con certeza
Azar: está relacionado con la suerte

Imagen 4.1: Caracterización del S9 escrita en el cuadernillo. Establece el fenómeno aleatorio desde la incerteza (CAT 2), mientras que el azar lo relaciona con la suerte (CAT 14).

Concepción 6: **“Aleatoriedad y múltiples opciones”**

Reconocimiento de la dimensión aleatoria en situaciones de **juego**, aludiendo a la **multiplicidad de opciones** respecto de los resultados. Esta concepción se expresa en la categoría **CAT 4**.

Interpretación:

Estas explicaciones aparecen fundamentalmente en las situaciones de juego, no así en contextos reales y cotidianos. Este tipo de razonamiento supone en cierta manera un análisis del espacio muestral, aunque no de forma sistemática, pero sí hay una reflexión sobre las distintas posibilidades del suceso (Azcárate, 1995). Es claro que en situaciones reales o cotidianas este análisis es mucho más complejo. Algunos ejemplos en los que se encuentra este tipo de concepción son los siguientes:

> *S8F1_L9: En cambio algo aleatorio, yo no estoy segura de lo que va a pasar. Puede haber varias opciones.*
>
> *S8F1_L43: (El lanzamiento del dado) Si, por su puesto es aleatorio. Porque yo no sé cual de todas las opciones va a salir. Al tener yo un “suceso aleatorio” significa que yo no sé qué es lo que va a salir. No es seguro. (Ítem 1.2.-).*
>
> *S9F1_L45: (Al lanzar el dado) No es seguro que salga el 1, que salga el 2…(Ítem 1.2.-).*

<u>Concepción 7:</u> "Aleatoriedad y aspectos subjetivos"
Reconocimiento de la dimensión aleatoria en situaciones **reales y cotidianas** y también de **juego**, aludiendo a aspectos **subjetivos** o desde la experiencia respecto a los resultados, haciendo además mención al grado de **incertidumbre**. Esta concepción se expresa en las categorías **CAT 5A** y **CAT 2**.

Interpretación:

En las argumentaciones dadas por los sujetos se puede observar cómo una parte de ellas reflejan la ausencia de un análisis objetivo de los fenómenos y en sus reflexiones transfieren habitualmente su experiencia personal. Algunos ejemplos en los que se encuentra este tipo de concepción son los siguientes:

> *S7F1_L136: la otra vez que anunciaron que llovería… ¿llovió? (ítem 1.6.-).*
>
> *S1F1_L141: sí pues. Pero eso es porque tienen instrumentos de medición y que se yo, pero para uno… dice que va a haber sol y amanece lloviendo. (Ítem 1.6.-).*
>
> *S1F1_L152: es sumamente variable, porque a veces te pueden decir que sí va a llover y no llueve. Y el instrumento falla. No hay una exactitud. Porque cambia, no es algo constante. (Ítem 1.6.-).*
>
> *S2F1_L153: no hay nada que se pueda determinar con exactitud. (Ítem 1.6.-).*

O bien:

> *S4F1_L69: si yo lo he hecho… Yo lo he hecho, lo he hecho en clases y de mil… cuando los chicos lanzan (dados) y uno agrupa las soluciones y uno observa que con mil lanzamientos agrupándolo de 10 niños por lo menos…" (Ítem 1.4.-).*
>
> *S1F1_L70: cada uno lanza una cantidad y luego se agrupan los resultados… (Ítem 1.4.-).*

Además:

> *S1F1_L221: al jugar en la práctica… es una tendencia… En un experimento real de lanzar 50 veces no mostraría esa tendencia… Yo pienso que la secuencia 1 es la real (ítem 2).*
>
> *S4F1_L225: De alguna manera tiene que ver con que uno ha experimentado en el "tiempo" cuando uno experimenta con los chicos ... no les va saliendo cara, sello cada vez ... eso no pasa en lo cotidiano . Siempre pasa o dos caras, o después tres sellos, después sello, cara (ítem 2).*

En estos casos algunos razonamientos podrían estar sesgados, por estar orientados desde su percepción del suceso o personalizados en lo que ellos creen o saben del suceso, es decir, sus concepciones previas al respecto (Azcárate, 1995; Cardeñoso, 2001).

En otros casos puede estar involucrado el tipo de estrategia de razonamiento[2] descrito por Konold (citado en Azcárate, 1996), según el cual se analiza el hecho aislado y no el fenómeno en sí mismo, lo que puede reflejar una dificultad en la comprensión del final de un juicio probabilístico. Un ejemplo de esto, tiene que ver en los fenómenos meteorológicos, cuando un sujeto escucha un pronóstico (que puede ser expresado como una probabilidad) y luego no ocurre lo que el especialista advirtió, lo cual tiene que ver en parte con el análisis del hecho aislado:

> *S7F1_L136: la otra vez que anunciaron que llovería… ¿llovió? (ítem 1.6.-).*
>
> *S1F1_L141: sí pues. Pero eso es porque tienen instrumentos de medición y que se yo, pero para uno… dice que va a haber sol y amanece lloviendo. (Ítem 1.6.-).*

A partir de esto se puede plantear el nivel de subjetividad que presentan los sujetos, además de cuánto y cómo están filtrados tales juicios por informaciones y valoraciones subjetivas.

Concepción 8: “Aleatoriedad y resultados posibles”

Reconocimiento del carácter aleatorio de un experimento, en contextos de **juego**, señalando que bajo similares condiciones existan las **mismas posibilidades** de que **ocurra lo mismo**. Esta concepción se expresa en las categorías **CAT 3 y CAT 6**.

Interpretación:

Esta concepción tiene que ver con la noción de experimento aleatorio. Si bien esta concepción podría mezclarse o confundirse con la noción de experimento más bien

[2] Estrategia de razonamiento descrita por Konold, denominada “outcome approach” (Azcárate, 1996).

determinista, es decir, en cuanto al argumento de que en condiciones similares se produzca el mismo resultado, finalmente la idea apunta al concepto de espacio muestral y los resultados posibles. Es decir, un experimento como el lanzamiento de la moneda “aquí y en la China” tiene el mismo espacio muestral: {cara, sello}. Siempre será igual. No obstante, esta caracterización es para el contexto de juego, ya que el espacio muestral está bien definido. Algunos ejemplos en los que se encuentra este tipo de concepción son los siguientes:

S2F1_L161: yo agregaría que cada vez que haga el experimento… cada vez que haga eso, existan las mismas posibilidades de que ocurra lo mismo.

S2F1_L163: bajo las mismas condiciones… (Otra profesora apoya). Es decir, yo hago esto aquí o en china y va resultar lo mismo.
S2F1_L165: siempre igual. Cosa que no puede pasar a veces con otros fenómenos.

S2F1_L182: creo que no se entendió cuando dije que... las condiciones externas que rigen ese experimento… puedan dar la misma probabilidad o que no ocurra o que ocurra en alguna otra parte. No estoy diciendo que si yo lanzo una moneda por ejemplo acá, tenga un 50% que salga cara y lo haga en otro país, no sea la misma. Quizá va a ser la misma… el fenómeno mismo el hecho de ejecutar el experimento es el que es aleatorio.

Por otra parte, el argumento apunta a que el experimento mostraría, tras una larga secuencia de lanzamientos, que los resultados posibles se estabilizarían acorde a una tendencia. En el caso del lanzamiento de la moneda un 50% para “cara” y un 50% para “sello”. Además, aparece el concepto de probabilidad. Ejemplos:

S7F1_L183: en el fondo repetir tantas veces provoque el mismo término.

S2F1_L184: claro provoque el mismo término.

F1_L185: pero ese fenómeno es aleatorio (Discusión…)

S2F1_L186: no hay variables… que lo acondicionen

S6F1_L187: es que ahí estamos hablando de probabilidad. Estamos hablando de probabilidad.

S4F1_L188: si estamos hablando de probabilidad

S2F1_L189: no está desconectado aleatorio con probabilidades

3.3. Concepciones acerca del azar

Concepción 9: "Azar como incertidumbre"

Reconocimiento del azar, en contextos **reales** y **cotidianos** y también de **juego**, aludiendo al grado de **incertidumbre** en los resultados de un cierto fenómeno o experimento. Se establece cierta distinción respecto de lo aleatorio y se dan explicaciones acerca de los efectos que escapan al control. Esta concepción se expresa en la categoría **CAT 2**.

Interpretación:

Las explicaciones en este caso tienen que ver con caracterizar el azar como algo de naturaleza incierta respecto de los resultados, o bien la falta de control sobre las causas y por ello los sucesos ocurren al azar. Es decir, a pesar de que se manejen las variables y condiciones del fenómeno o experimento y se haga lo mejor posible, aún así podría no resultar. Algunos ejemplos en los que se encuentra este tipo de concepción son los siguientes:

> *S3F1_L175: Yo pienso que el azar es absolutamente lo contrario a eso... en términos de que de una u otra manera el azar a mí me dice de que independiente de que yo que yo (ilustre) reproduzca las mismas condiciones aquí y en la quebrada del ají, tengo todavía posibilidades de que no resulte igual. Tengo todas las posibilidades de que no resulte de la misma manera. Porque el azar te da ese margen (no sé cómo llamarlo, margen de error)*

> *S3F1_L179: Si yo tiro la moneda igual no va a caer como cayó la vez anterior… independiente de que yo tenga las mismas condiciones que no cambie la temperatura, presión o el peso de la moneda o la fuerza con la que tiré, controlando todo eso, la moneda igual puede caer cara o sello, independiente de todo eso. Por lo tanto, dentro de todo me quedo solamente con la definición que dijo la profesora: "… que no se puede bajo ninguna circunstancia decir con exactitud (predecir en forma eficaz) lo que va a suceder".*

Respecto del significado de azar se tiene:

> *S6F1_L339: "Azar, eh…, es algo que va a suceder, no tengo… no sé lo que va a ocurrir… "*

A partir de los ejemplos, se revela de alguna manera una concepción del azar como **absoluto e independiente,** que no es posible controlar (Azcárate, 1995; Cardeñoso, 2001; Hacking, 2006). Por otra parte respecto de los términos "azar" y "aleatorio" los sujetos, a veces, no hacen mayor distinción. Sin embargo, cuando se les pregunta directamente reconocen algunas diferencias, aunque dicha diferenciación no es fácil. Por ejemplo, respecto del azar destacan la incertidumbre y cierto grado de "desorden":

> *S7E1_L366: Por eso te digo… o sea el azar es algo que no está establecido, está más relacionado con… si de una manera con lo que esté. Un desorden, o sea con lo que haya… me entendís… uno nunca sabe absolutamente nada. Pero a mí se… de aleatorio se me imagina, dentro de (un orden)*

Y respecto de lo aleatorio, señalan conceptos tales como orden, establecido o seguro:

> *S7E1_L367: … claro ocurre azar… uno no sabe lo que va a pasar… pero está dentro establecido de ciertas… de algo seguro.*
>
> *S7E1_L324: Es azaroso, claramente lo aleatorio. Pero se me imagina que está en una disposición, a eso me refiero… me entendís, está ordenado… tiene un orden. Me entendís…*
>
> *S7E1_L339: Eso creo yo…. Claro que uno lo puede predecir… pero está ya establecido… está ordenado de alguna manera.*

<u>Concepción 10: "Azar como suerte o algo mágico"</u>

Reconocimiento del azar, en **contextos reales** y **cotidianos** y también de **juego**, aludiendo a aspectos tales como la **suerte** o lo **mágico**. Esta concepción se expresa en la categoría **CAT 14**.

Interpretación:

Llaman la atención los significados relacionados con la última categoría, por todo lo que conlleva al mundo de lo mágico y la suerte. Estas respuestas relacionan el azar con la suerte en su doble acepción, positiva o negativa, con lo desconocido, con lo oculto, incluso con el destino (Azcárate, 1995). Claramente esto tiene una carga cultural en el terreno de lo más popular. Algunos ejemplos en los que se encuentra este tipo de concepción son los siguientes:

S1F1_L194: azar muchas veces se relaciona simplemente con la suerte.

S3F1_L196: el azar lo relacionan con la parte suerte. Se relaciona con la suerte pero en un término (como que na' que ver) más "demoniaco" del tema más… (Animador: o divino?) … Si pero por el lado malo, porque para eso existe lo que se denomina las "serendipias[3]"

S3F1_L200: mitos (eventos) milagrosos a grandes rasgos.

En las siguientes imágenes se muestra cómo dos sujetos entienden los fenómenos aleatorios y el azar:

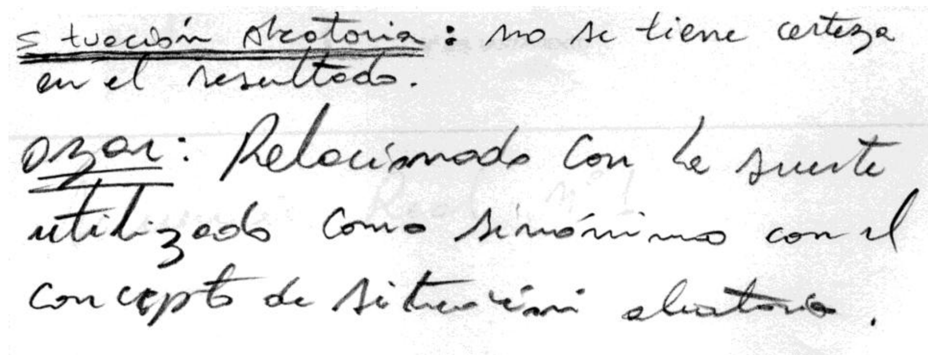

Situación aleatoria: no se tiene certeza en el resultado.
azar: Relacionado con la suerte utilizado como sinónimo con el concepto de situación aleatoria.

Imagen 4.2: caracterización del S6 escrita en el cuadernillo. Establece el fenómeno aleatorio desde la incerteza (CAT 2), mientras que el azar lo relaciona con la suerte (CAT 14), sin embargo, establece los términos como sinónimos.

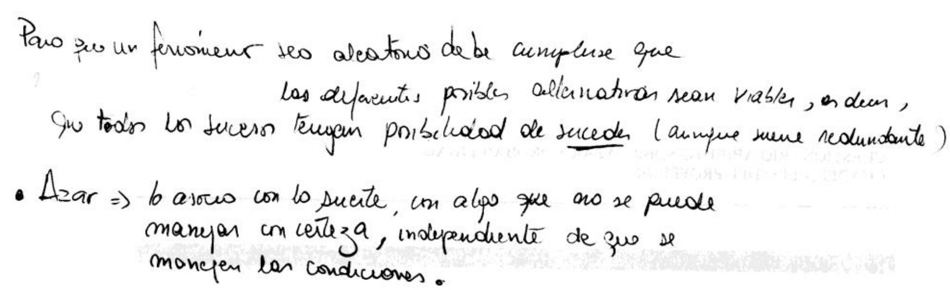

Para que un fenómeno sea aleatorio debe cumplirse que los diferentes posibles alternativas sean viables, es decir, que todos los sucesos tengan posibilidad de suceder (aunque suene redundante)
• Azar => lo asocio con la suerte, con algo que no se puede manejar con certeza, independiente de que se manejen las condiciones.

Imagen 4.3: Caracterización del S3 escrita en el cuadernillo. Establece el fenómeno aleatorio desde las múltiples opciones (CAT 4), mientras que el azar lo define desde la incerteza (CAT 2), pero además lo asocia con la suerte (CAT 14)

[3] Una **serendipia** es un descubrimiento o un hallazgo afortunado e inesperado. Se puede denominar así también a la casualidad, coincidencia o accidente http://es.wikipedia.org/wiki/Serendipia. Otra definición es: "la capacidad de hacer descubrimientos por accidente y sagacidad, cuando se está buscando otra cosa. http://serendipia.zoomblog.com/archivo/2008/01/10/otra-Definicion-de-Serendipia.html

Ligado a lo mágico y a la suerte, aparece el concepto de “cargado”, el cual según los docentes manejan culturalmente los estudiantes. Por ejemplo, respecto al concepto de un “dado cargado”:

> *S4F1_L550: … y es luchar también con el concepto que los niños tienen de cargado … por que para los niños cargado es que mira siempre sale el uno y eso es estar cargado.*
>
> *S4F1_L552: porque está vinculado a la suerte… es el concepto que por lo general ponte tú, manejan los niños.*

O bien, aquellas formas de atraer a la suerte:

> *S3F1_L560: … sopla, sopla.*
>
> *S4F1_L561: … o dale un dedo… O tantas cuestiones que hay… y los besan…*

Otros casos tienen que ver con que en los textos de matemática los términos aleatoriedad y azar se usan como sinónimos. Sin embargo, en lo cotidiano azar tiene que ver más con la suerte. Por ejemplo:

> *S1F1_L204: pero por eso decía que se usan en matemática como sinónimos… pero lo que es la vida cotidiana el azar siempre está más considerado más a la suerte… que son juegos de azar*

3.4. Concepciones acerca de la probabilidad

Concepción 11: “Concepción laplaciana de la probabilidad”

Interpretación y estimación de la probabilidad, en contextos de **juego**, como la **razón** entre “casos favorables” y “casos posibles”. Esta concepción se expresa en la categoría **CAT 7**.

Interpretación:

Las respuestas que involucran una interpretación laplaciana de la probabilidad, es decir, la **razón** entre “casos favorables” y “casos posibles”, se presenta casi exclusivamente en situaciones de juego. Esto se debe a que la aplicación en dichos contextos, donde el espacio muestral es finito y simétrico, es un modelo válido y útil para analizar la situación y cuantificar las posibilidades de los distintos resultados (Azcárate, 1995; Cardeñoso, 2001). Algunos ejemplos en los que se encuentra este tipo de concepción son los siguientes:

> *S2F1_L307: pero en el caso de la suma (igual a 7) es 1/6… (ítem 3.4)*

O bien,

> *S7F1_L438: Son 6 de 36 (ítem 6)*
> *S2F1_L487: por eso es el siete el que tiene más probabilidades (ítem 6).*
> *S3F1_L488: el que tiene más probabilidades es el 7 (ítem 6).*

Además, desde el cuadernillo se registraron respuestas tales como las que aparecen en las siguientes imágenes:

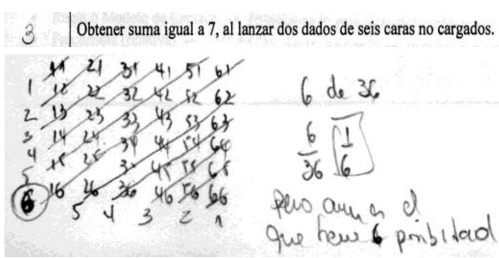


Imagen 4.4: Respuesta del S3 al ítem 3.4. Al realizar los cálculos obtiene una probabilidad de 1/6 para la suma 7. Notar que asigna un “3” a la proposición.

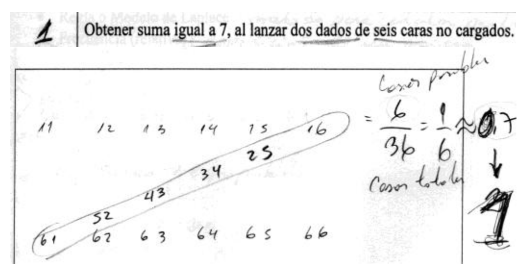


Imagen 4.5: Respuesta del S6 al ítem 3.4. Al realizar los cálculos obtiene una probabilidad de 1/6 para la suma 7, y a partir de esto asigna el valor “1” no atendiendo necesariamente a la escala propuesta de 0 a 10.

Finalmente, respecto del ítem 10 (un juego con dados):

> *S3F2_L524: Por lo tanto, escogería al jugador que… el jugador B, que dice que si sale par gana el muchacho. Porque tiene 3/4 contra 1/4 del otro (ítem 10).*

Cabe destacar que esta interpretación de la probabilidad está suficientemente instalada en el conocimiento de los docentes, a raíz de sus estudios previos y el refuerzo en sus cursos de actualización docente. Por lo mismo, no se registró aquella categoría denominada "Contingencia", la cual alude a una interpretación de la probabilidad que relaciona "casos favorables" y "casos desfavorables". La contingencia relaciona mejor la creencia del sujeto, respecto a la regla de Laplace (Pierce, 1979; citado en Cardeñoso, 2001).

Concepción 12: "Concepción frecuencial de la probabilidad en contextos de juego"

Interpretación y estimación de la probabilidad, en contextos de **juego**, desde una mirada **frecuencial** del fenómeno, reconociendo regularidades o patrones en la repetición del experimento. Esta concepción se expresa en la categoría **CAT 8**.

Interpretación:

Las respuestas de los docentes, acorde a esta concepción, se observan en los contextos de juego, donde las situaciones presentan experimentos aleatorios usando dados, monedas o ruletas. A partir de las repeticiones de cada experimento es posible identificar "regularidades" y, por ejemplo, determinar qué eventos tienen mayor probabilidad de salir. Con esta información los docentes toman decisiones, por ejemplo, sobre qué evento "apostar". Esta interpretación "a posteriori" de la probabilidad no es ajena a los docentes y son estrategias que por lo general emplean para trabajar con sus estudiantes e introducir el tema desde lo experimental. Algunos ejemplos en los que se encuentra este tipo de concepción son los siguientes:

Desde el cuadernillo se registraron respuestas tales como la que aparece en la siguiente imagen:

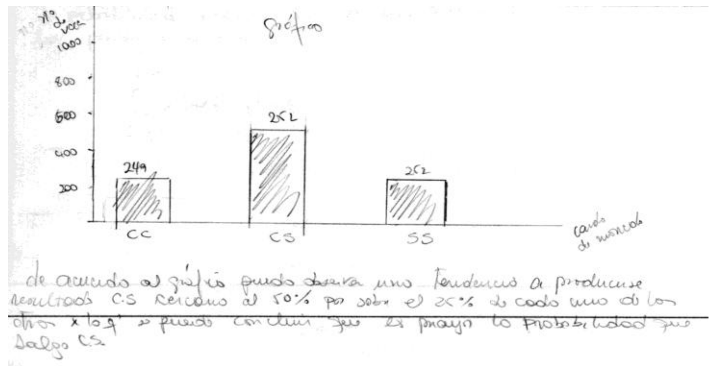


Imagen 4.6: Gráfico realizado por S3 para el ítem 5 en el cuadernillo. Notar que utiliza una escala con frecuencias absolutas. El texto asociado dice: "*De acuerdo al gráfico puedo observar una tendencia a producirse resultados C-S cercana al 50%, por sobre el 25% de cada uno de los otros. Por lo que se puede concluir que es mayor la probabilidad que salga C-S*".

O bien, respecto del **ítem 5** al observar los resultados de 1000 lanzamientos de dos monedas:

S2F2_L255: Un 50% de cara y sello.
S2F2_L258: (y otros) 25 y 25 más menos (CC y SS)
S7F2_L259: 24, 9 (CC)
S3F2_L261: 24, 9 y 25, 2 (CC y SS)

En el mismo **ítem 5**, identifican tendencias y regularidades:

S3F2_L269: Debiesen mantenerse…
S6F2_L270: 50, 25 y 25….
S6F2_L271: Tender a estabilizarse…
S6F2_L272: Debería tender a esa normalidad…

No obstante, respecto a la apuesta sobre el próximo lanzamiento los docentes a veces olvidan que el resultado es "independiente" del anterior, o dicho de otra forma "no tiene memoria". Luego es posible encontrar algunos sesgos en la interpretación. Si bien al observar las frecuencias relativas o porcentajes, alguno de los eventos se destaca por su recurrencia, por ende una "mayor" probabilidad experimental, el siguiente lanzamiento puede ser cualquiera de los eventos que contiene el espacio muestral.

Es así como en las argumentaciones de tipo de frecuencial es posible observar algunas estrategias **heurísticas** (accesibilidad, representatividad) según el contexto de la tarea (Cardeñoso, 2001). En particular, se pueden presentar los sesgos de "recencia negativa y positiva", así como también el sesgo de "aplicación al próximo suceso" (Fischbein, 1975; Konold, 1991; citados en Azcárate, 1996). Las argumentaciones pueden estar en la experiencia directa de cada sujeto (Cardeñoso, 2001). Algunos ejemplos de lo anterior se muestran a continuación:

Una respuesta registrada en el cuadernillo es la siguiente:

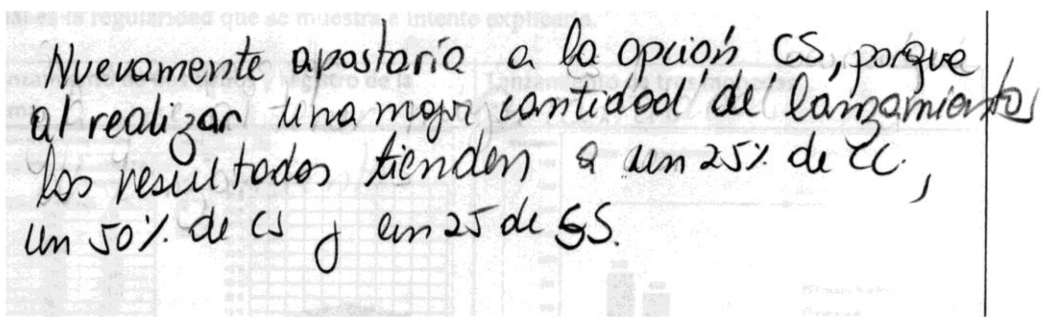


Imagen 4.7: Respuesta en términos de "apuesta" del sujeto 7 escrita en el cuadernillo. El texto dice: *"Nuevamente apostaría a la opción CS, porque al realizar una mayor cantidad de lanzamientos los resultados tienden a un 25% de CC, un 50% de CS y un 25 de SS"*.

O bien, respecto del **ítem 6**, al observar la simulación del lanzamiento de dos dados y sumar las caras, los sujetos detectan regularidades:

> *S4F1_L401: si… (El siete)*
> *S3F1_L406: la curva se concentra más hacia el centro.*
> *S9F1_L407: sí, tiende hacia los datos centrales*
> *S9F1_L414: se verificó una tendencia… (Otros apoyan)*

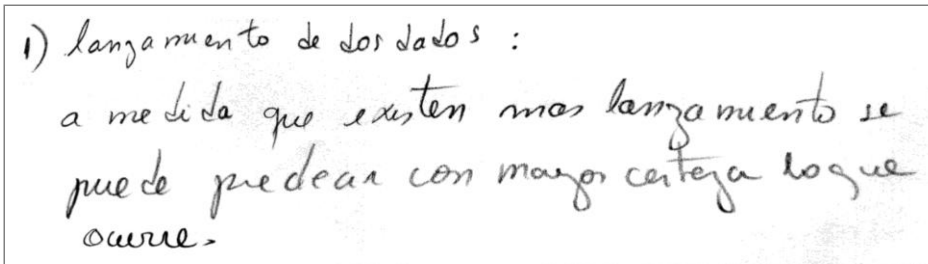


Imagen 4.8: Respuesta del S4 al ítem 6. Argumenta que a medida que aumenta el número de lanzamientos, es posible hacer una mejor predicción del comportamiento del fenómeno

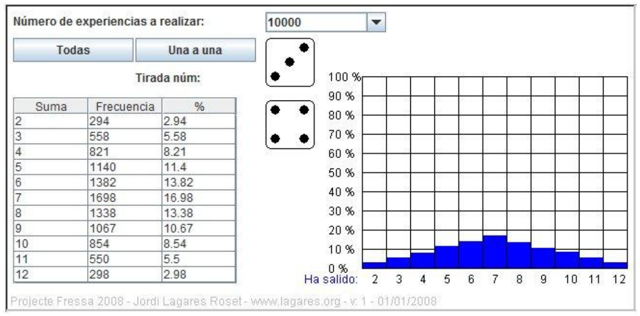


Imagen 4.9: Recurso digital "lanzamiento de dos dados"[4].

<u>Concepción 13: "Concepción frecuencial de la probabilidad en contextos reales y cotidianos"</u>

Interpretación y estimación de la probabilidad desde una mirada **frecuencial**, en contextos **reales** y **cotidianos** haciendo una lectura directa del fenómeno en términos de porcentaje, o bien haciendo una interpretación de dichos porcentajes en términos de razón, o bien incurriendo en algún sesgo o heurística en la mirada global del problema. Esta concepción se expresa en las categorías **CAT 5B** y **CAT 8**.

Interpretación:

En esta parte los docentes interpretan la información desde una lectura directa de los porcentajes indicando, a partir del número, si existe una mayor posibilidad de que ocurra el fenómeno. Por ejemplo, es el caso del **ítem 11.a** (significado de que haya un 30% de posibilidades de que mañana llueva). En este caso los docentes asumen que existe algún estudio sobre factores o condiciones reinantes como la temperatura, presión atmosférica, etc., los que indicarían de alguna manera la probabilidad de que llueva o no. A cada uno de los factores se les asignaría un número, lo que daría un porcentaje final. Además, el 30% es asociado a un tercio de las posibilidades. Algunos ejemplos, de lo anteriormente descrito, son los siguientes:

[4] http://www.xtec.cat/~jlagares/matematiques/probabilitat/dosdaus/DosDausCastellano.html

S9E1_L373: El 30% indica que existe menos posibilidades de que llueva ¿ya? Y yo creo que se basa en muchos estudios y salen muy asertivos ¿ya? La verdad es que con toda la tecnología que tienen ahora son capaces de decir ya mañana va a llover, mañana va a hacer 5° grados ¿ya?

S9E1_L375: Si, los estudios están apoyados en datos… no sé pos en datos de la temperatura, la presión atmosférica, de la humedad del aire, de los vientos, etc.

S9E1_L377: Si, las condiciones climáticas. Y que haya un 60% de probabilidad aumenta la probabilidad de que si efectivamente llueva… el 60% aumenta la probabilidad de que llueva… es más probable que llueva de que no llueva.

O bien, esta otra respuesta:

S3E1_L440: A ver, yo creo que el meteorólogo llega al 30% de resultado haciendo todo un análisis de las condiciones. Condiciones reinantes en el tiempo… entonces a todas yo creo que le asigna, se le asignan valores a cada una de las condiciones y eso de una y otra manera le…le va a marcar un porcentaje de posibilidad de que llueva o no llueva. El 30% significa que estamos bajo la… bajo un tercio de las posibilidades del… del un tercio de posibilidades de que llueva, menos de un tercio en realidad de un 100% eh… por lo tanto, yo lo interpreto como que no tengo que llevar paragua al otro día, por ejemplo. Es mi forma de interpretación. Eh… si me dice que hay un 60% de posibilidades de que llueva… me está hablando de que estamos por sobre la mitad de las posibilidades. Entendiendo el 100% como el todo. Por lo tanto ahí si echaría el paraguas.

Algunos sujetos reconocen que el hecho de ser un 30% o un 60%, no es algo categórico sino que se trata de un indicador de lo que posiblemente ocurra. En el caso de los anuncios meteorológicos, desde su experiencia, reconocen que hay aciertos y desaciertos. Por ejemplo:

S3E1_L442: Claro, yo…yo entiendo que estos tipos… independiente de lo que…de los aciertos y desaciertos que han tenido muchas veces, yo creo que estos… números 30, 60 por ciento…

S3E1_L443: No es tajante, pero dicen va a llover mañana… sino que dicen hay un 60% de probabilidades,

En otros casos la interpretación de un 30% de que llueva es realizada en forma exacta o más literal: de 10 factores involucrados, 3 de ellos indicarían que va a llover. Por ejemplo, se tiene la siguiente respuesta:

S2E1_L493: Bueno la explicación que yo di ahí es que 10 factores que él tenga a disposición, por dar un número, pueden ser menos, si son 10, 3 de esos factores están diciendo que va a llover… Porque para que llueva tienen que darse condiciones de *presiones, de altitudes, de temperaturas, ¿verdad? De nubes, condiciones geográficas, de terreno, tantas cosas, entonces, el reúne todos estos datos y de los 10 datos que tienen que tener para que llueva con seguridad tiene tres.*

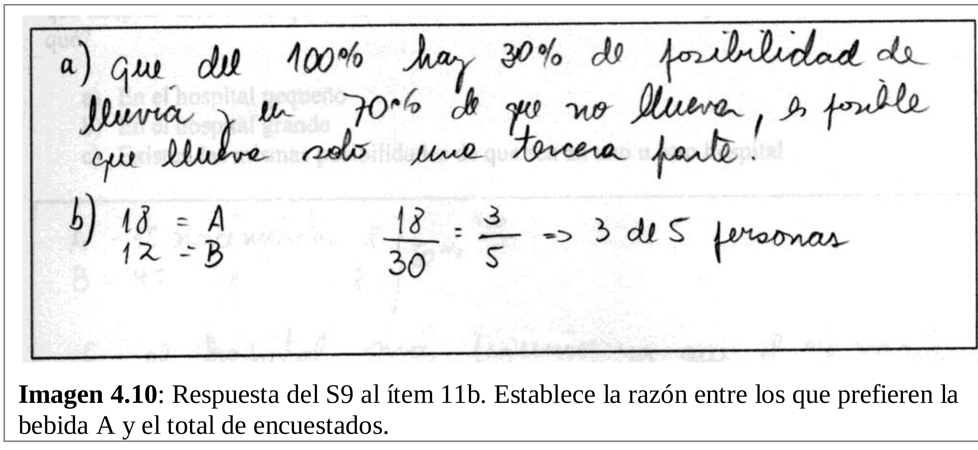
S2E1_L495: Entonces dice, la probabilidad es 30% que llueva.

E1_L496: ¿Y si cambia a 60%?
S2E1_L497: es porque se agregaron otros factores más… que no estaban en ese momento.

La interpretación de información probabilística, dada en términos de porcentaje, como un valor exacto y no aproximado, semejante al sentido de la información proporcional en contextos aritméticos o geométricos, puede ser un obstáculo a la hora de la comprensión de los modelos probabilísticos y su modelización de los fenómenos de la realidad (Azcárate, 1996).

Por otra parte, cabe señalar que en ninguna de las respuestas estaría clara la clase de referencia, es decir, la clase de eventos a los cuales una probabilidad de sucesos simples se refiere (Gigerenzer, 2005). En otras palabras, lo que puede interpretar una persona cualquiera, desde su experiencia, puede distar bastante de lo que un experto (meteorólogo) comprende del significado de dicha probabilidad y cómo se obtiene.

En el caso de la encuesta sobre preferencias de bebidas (**ítem 11b**), en general los docentes no tienen problemas para establecer una razón entre los casos favorables y el total de encuestados y eso lo interpretan como una probabilidad. Por ejemplo, se tienen las respuestas:



a) que del 100% hay 30% de posibilidad de lluvia y un 70% de que no llueva, es posible que llueva solo una tercera parte.

b) 18 = A
12 = B

$\frac{18}{30} = \frac{3}{5}$ => 3 de 5 personas

Imagen 4.10: Respuesta del S9 al ítem 11b. Establece la razón entre los que prefieren la bebida A y el total de encuestados.

O bien, esta otra:

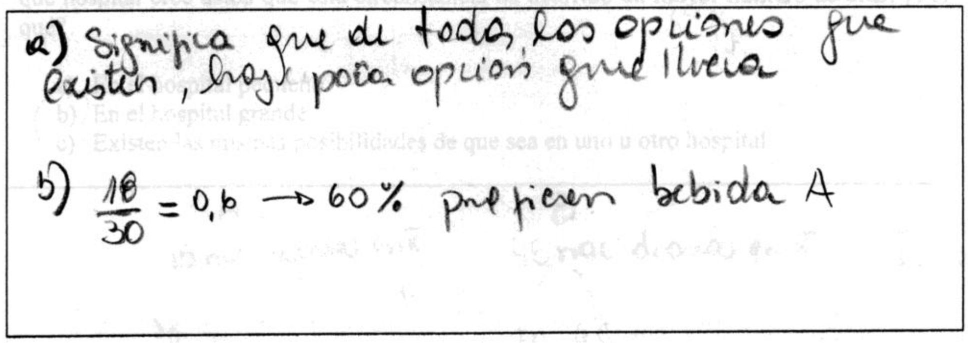


Imagen 4.11: Respuesta del S7 al ítem 11b. Establece la razón entre los que prefieren la bebida A y el total de encuestados. Transforma en porcentaje.

En algunos casos es posible apreciar el tipo de razonamiento[5] descrito por Konold (citado en Azcárate, 1996), según el cual se analiza el hecho aislado y no el fenómeno en sí mismo, lo que puede reflejar una dificultad en la comprensión final de un juicio probabilístico. A partir de esto se puede plantear el nivel de “subjetividad” que presentan las personas, además de cuánto y cómo están filtrados tales juicios por informaciones y valoraciones subjetivas. Algunos ejemplos pueden estar en el siguiente tipo de respuestas:

> *S7F1_L136: la otra vez que anunciaron que llovería… ¿llovió? (ítem 1.6.-).*
>
> *S1F1_L141: sí pues. Pero eso es porque tienen instrumentos de medición y que se yo, pero para uno… dice que va a haber sol y amanece lloviendo. (Ítem 1.6.-).*
>
> *S1F1_L152: es sumamente variable, porque a veces te pueden decir que sí va a llover y no llueve. Y el instrumento falla. No hay una exactitud. Porque cambia, no es algo constante. (Ítem 1.6.-).*

En el caso del **ítem 13**, donde se pide comparar los nacimientos en dos hospitales, se presentan algunos heurísticos. Este tipo de razonamientos ha sido utilizado en ocasiones anteriores para investigar las estrategias de sujetos adultos y estudiantes de secundaria, detectando interpretaciones alternativas a las normativas (Kahneman, Slovic y Tversky, 1992; Moustagin, 1983; Serrano, 1993; citados en Azcárate, 1995).

[5] Estrategia de razonamiento descrita por Konold, denominada “outcome approach” (Azcárate, 1996).

En este caso se presenta el "heurístico de representatividad", el cual supone transferir las propiedades del modelo, referidas a la población, al caso concreto de la muestra. Puesto que la probabilidad de nacer hombre o mujer es del 50% aproximadamente, los sujetos que razonan a través de este heurístico, juzgan igual de posible cualquier representación del fenómeno, en cualquier muestra y, siempre respetan la proporción (Azcárate, 1996). Es decir, presentan una clara insensibilidad al tamaño de la muestra y no consideran la mayor variabilidad de la distribución en muestras pequeñas. Algunos ejemplos se encuentran en las siguientes respuestas:

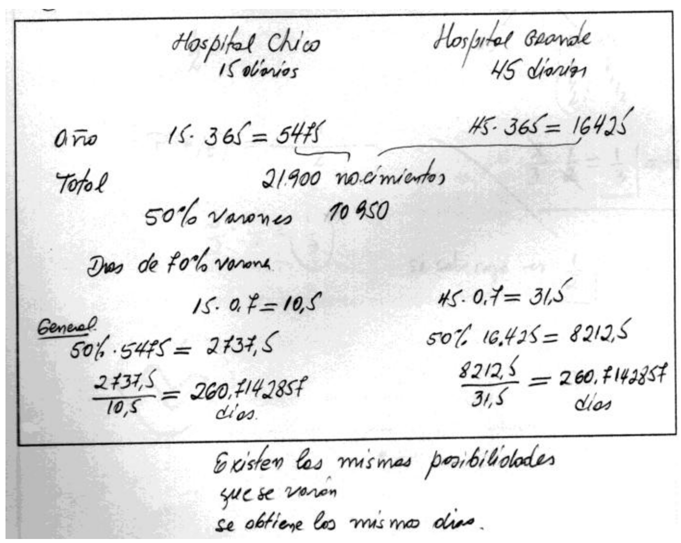
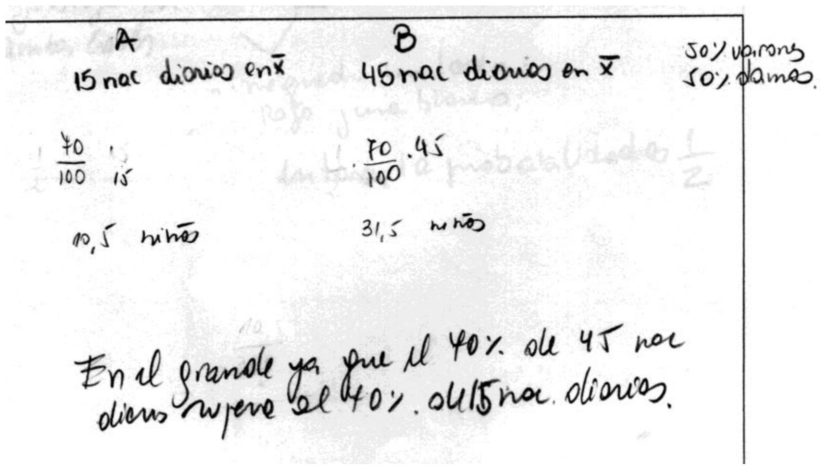


Imagen 4.12: Respuesta del S2 al ítem 13. Establece que existen las mismas posibilidades de que sea en uno u otro hospital, luego de realizar los cálculos.

O bien, esta otra respuesta:


A B
15 nac diarios en $\bar{x}$ 45 nac diarios en $\bar{x}$ 50% varones 50% damas.

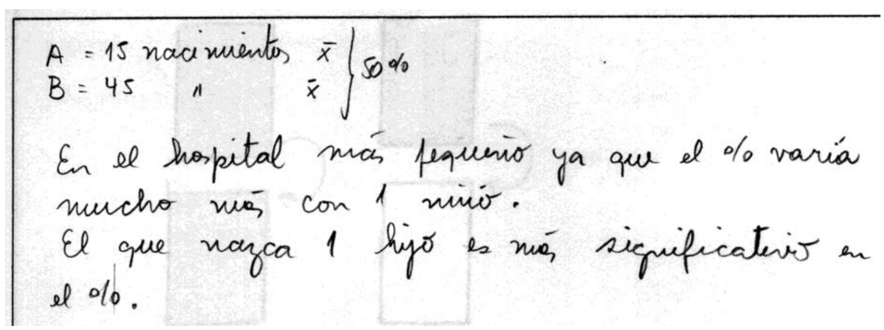
$\frac{70}{100} \cdot 15$ $\frac{70}{100} \cdot 45$

10,5 niños 31,5 niños

En el grande ya que el 40% de 45 nac diarios supera el 40%. de 15 nac. diarios.

Imagen 4.13: Respuesta del S2 al ítem 13. Establece que es más probable que ocurra el evento en el hospital grande, tras realizar los cálculos.

También es posible encontrar respuestas que apunten a un razonamiento intuitivo más correcto. Por ejemplo:


A = 15 nacimientos $\bar{x}$ } 50%
B = 45 " $\bar{x}$

En el hospital más pequeño ya que el % varía mucho más con 1 niño.
El que nazca 1 hijo es más significativo en el %.

Imagen 4.14: Respuesta del S9 al ítem 13. Establece que es más probable que ocurra el evento en el hospital pequeño, argumentando que el porcentaje varía más con solo aumentar o disminuir un varón.

<u>**Concepción 14: "Variación de la probabilidad si se conoce información"**</u>

Interpretación y estimación de la probabilidad de los fenómenos, en **contextos reales y cotidianos**, desde una lectura de aspectos que la **condicionan o modifican**, pero revelando además ciertos grados de incertidumbre. Esta concepción se expresa en las categorías **CAT 2, CAT 3 y CAT 9A.**

Interpretación:

Las respuestas de los docentes muestran algunos argumentos en los que se puede apreciar el modo en que las probabilidades pueden ser afectadas, cuando se conoce cierta información. Esto se refleja en las valoraciones que realizan cuando se les solicita dar un número entre 0 y 10. Por ejemplo, respecto al **ítem 3.6** de "si va a llover mañana en Santiago", los sujetos asignan notas superiores a 5. En sus propios términos argumentan que, dado que se conoce información, la probabilidad se modifica. De alguna manera esto es una mirada a la comprensión de la probabilidad condicional. Algunos ejemplos donde se muestra esta concepción son los siguientes:

> *S4F1_L317: yo puse 5, (varias voces apoyan esta respuesta) (Ítem 3.6)*
> *S9F1_L320: yo puse 6. (Ítem 3.6)*
> *S4F1_L323: porque se maneja información… (Ítem 3.6)*
> *S7F1_L326: para mí no sé, no tengo idea… Pero, si tú manejas una cierta… (Otros sujetos apoyan: "más información…") (Ítem 3.6)*

O bien, la siguiente respuesta del cuadernillo:

Valor	Sucesos
5	Obtener un sello al tirar una moneda honesta o sin trucar, después de haber obtenido una secuencia de cuatro caras seguidas.
10	Encender la luz al pulsar el interruptor.
5	No enfermarse de gripe o influenza el mes que viene.
1	Obtener suma igual a 7, al lanzar dos dados de seis caras no cargados.
?	Que nieve este invierno en Santiago.
?	Que llueva mañana en Santiago.

Imagen 4.15: Respuesta del S9 al ítem 3. Notar que para las últimas proposiciones (3.5 y 3.6) asigna un signo de interrogación. Justamente tienen que ver con situaciones meteorológicas.

3.5. Criterios o estrategias de razonamiento frente a situaciones que involucran azar y probabilidades

<u>Criterio 1: "Razonamiento proporcional"</u>

En situaciones que involucran azar y probabilidades, en contextos **reales** y **cotidianos**, justifican sus decisiones mediante un **razonamiento proporcional**. Este criterio se expresa en la categoría **CAT 10.**

Interpretación:

Acorde a este criterio, para efectos de esta investigación, se han presentado dos tipos de situaciones. En primer lugar, respuestas involucradas que tienen que ver con el uso la "proporcionalidad directa" para obtener un cierto resultado. Por ejemplo, en el caso de la muestra de ampolletas (**ítem 22**), si se escogen 100 al azar y se ven las defectuosas, entonces proporcionalmente se puede obtener una estimación de las defectuosas del total (3000). Por ejemplo, se tiene la siguiente respuesta:

> *S3E1_L499: Las 3000 ampolletas… El razonamiento fue… a ver… lo que hice fue… dividir la cantidad… a grandes rasgos agrupar… si por cada… decía que de 3000 ampolletas 100 fueron seleccionadas al azar… para realizar un control de calidad… Entonces yo fui haciendo grupos de 100… me daban 30 grupos de 100… Si de cada grupo de 100 se salían 5 ampolletas malas y… el razonamiento fue que si tenía 30 grupos… hice la multiplicación entre 30 x 5 y me da 150 ampolletas malas… que es probable que resulten dentro de las 3000.*

En la siguiente imagen se visualiza el cálculo realizado.

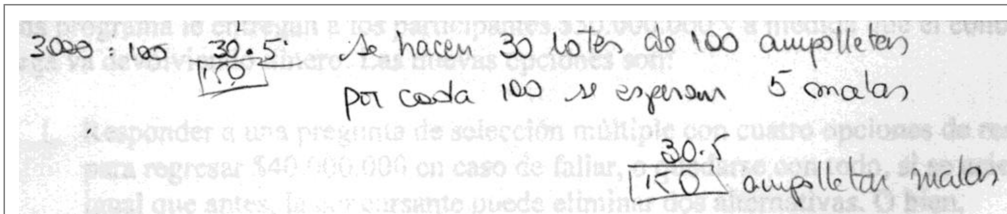


Imagen 4.16: Respuesta de sujeto S3 al ítem 22 en el cuadernillo.

En segundo lugar, hay respuestas (**ítem 11.a**) que tienen que ver con la explicación de Azcárate (1996). Es decir, la interpretación de información probabilística, dada en términos de porcentaje, como un valor exacto y no aproximado, semejante al sentido de la información proporcional en contextos aritméticos o geométricos. Un ejemplo donde se muestra esta situación es el siguiente:

> *S2E1_L493: Bueno la explicación que yo di ahí es que 10 factores que él tenga a disposición, por dar un número, pueden ser menos, si son 10, 3 de esos factores están diciendo que va a llover… Porque para que llueva tienen que darse condiciones de presiones, de altitudes, de temperaturas, ¿verdad? De nubes, condiciones geográficas, de terreno, tantas cosas, entonces, el reúne todos estos datos y de los 10 datos que tienen que tener para que llueva con seguridad tiene tres (Ítem 11.a).*

Otro ejemplo similar puede ser el siguiente:

> *S3E1_L440: A ver, yo creo que el meteorólogo llega al 30% de resultado haciendo todo un análisis de las condiciones. Condiciones reinantes en el tiempo… entonces a todas yo creo que le asigna, se le asignan valores a cada una de las condiciones y eso de una y otra manera le…le va a marcar un porcentaje de posibilidad de que llueva o no llueva…*

El considerar porcentajes, como una proporción aplicable literalmente que ha de presentarse como tal en la realidad, sin reconocer su significado relativo, propio del contexto probabilístico, puede ser un obstáculo a la hora de la comprensión de los modelos probabilísticos y su modelización de los fenómenos de la realidad (Azcárate, 1996).

Criterio 2: "Razonamiento combinatorio intuitivo"

En situaciones que involucran azar y probabilidades, en **contextos reales y cotidianos** y también de **juego**, justifican sus decisiones mediante un **razonamiento combinatorio intuitivo** o **incompleto**. Este criterio se expresa en las categorías **CAT 7, CAT 11 Y CAT 12A.**

Interpretación:

En este tipo de respuestas los docentes proponen razonamientos combinatorios intuitivos, no usando expresiones formales, o bien no alcanzan el objetivo propuesto. Algunos ejemplos de este tipo de razonamiento se muestran a continuación a partir del **ítem 17** (número de trayectos posibles, al considerar dos tipos de esquema):

A) (Esquema 1) Concluir que es 8x8:

S6F2_L1134: ¡Ah! ya me di cuenta de que vendría siendo 1…. 8x 8 (S9: pero tenis que llegar a la última de las últimas filas)
S3F2_L1135: Tenís que llegar a 8X8
S9F2_L1136: ¡Ah!, un círculo cualquiera de la última fila… de la última fila.
S3F2_L1137: Todas las posibilidades de acuerdo a la cantidad de 64… (¿Círculos?)
S3F2_L1140: Multiplica por 64…

B) (Esquema 2) Concluir que es 2^8:

S1F2_L1524: Oye pero sabes qué, lo otro interesante es lo que planteó la Leni, la Leni dijo 2 elevado a 8… y también tiene lógica si lo planteamos a los alumnos… Yo parto aquí, cuántas posibilidades tengo… dos mira, la leni lo que hizo fue… tengo o bajo ahí, o bajo ahí, dos … y voy dos elevado a 8, cachai???
S4F2_L1526: Se repite 8 veces…
S1F2_L1527: Pero obviamente no es equivalente… 8 elevado a 4, que 2 elevado a 8.

También se pueden observar representaciones visuales para analizar un problema. Un ejemplo de esto corresponden al **ítem 10** (juego que consiste en el lanzamiento de dos dados y se considera el producto de las caras (a) y luego la suma (b):

S3F2_L523: Eh… primero la letra a) dice que considere que son dados no cargados y se calcula el producto entre ellos. Entonces yo fui mirando la probabilidad de que saliera par y de que saliera impar, en términos de las combinaciones. Yo sé que par x par da par, par x impar da par también, impar x par también da par, y que la única combinación que nos podía dar impar era que salieran dos números impares. Por lo tanto, dentro de eso la mayor probabilidad, siguiendo más menos el caso de allá es que eh… me salga un número par.

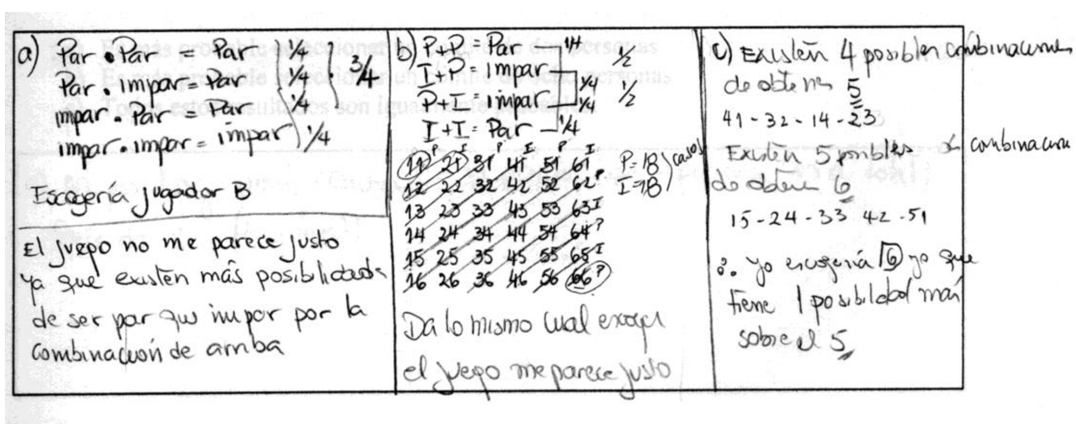


Imagen 4.17: Respuesta del sujeto 3 al ítem 10 escrita en el cuadernillo. Para el producto (a) de los dados, concluye que el juego no es justo, ya que los resultados pares tienen más posibilidades. En cambio para la suma (b) el juego es justo, ya que da lo mismo escoger par o impar. En la letra (c) concluye que la suma igual a 6 tiene más posibilidades que la suma igual a 5.

A continuación la respuesta está en términos de probabilidad:

> *S3F2_L524: Por lo tanto, escogería al jugador que… el jugador B, que dice que si sale par gana el muchacho. Porque tiene 3/4 contra 1/4 del otro.*
> *S3F2_L526: Y si es un juego justo, dada las circunstancias, no viene siendo un juego justo. Porque hay más probabilidades de que salga un par eh… producto de las combinaciones entre par e impar. Eso.*

También es posible encontrar respuestas que recogen relaciones **aritméticas**. En el caso del ítem 12, en el cual se requiere formar comisiones de 2 y 8 personas, posiblemente tenga incidencia la expresión "comisiones diferentes", como grupos totalmente diferentes en su composición, idea que les lleva a no plantearse otra solución que el simple reparto. El razonamiento es mediante el reparto directo del número de personas del grupo inicial, y no hay indicios de composiciones combinatorias. Este razonamiento aritmético está asociado a la lógica concreta de Piaget (Azcárate, 1996). Un ejemplo de esta situación es la siguiente:

La respuesta en el cuadernillo es la siguiente: *"Porque hay más cantidad de comités de 2 personas (10 en total) que de 8 (4 en total)"*

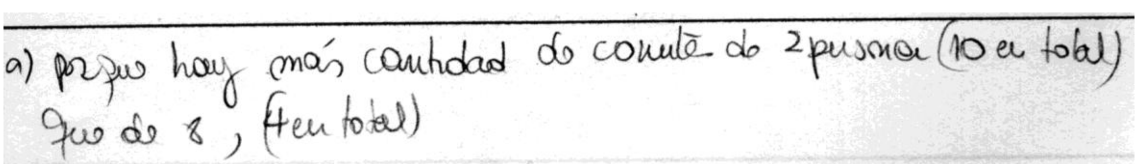

a) porque hay más cantidad de comite de 2 personas (10 en total) que de 8 , (4 en total)

Imagen 4.18: Respuesta del sujeto S3 al ítem 12 en el cuadernillo.

El desconocimiento de la propia expresión matemática, o su no consideración, obliga a los sujetos a realizar una aproximación global al resultado basada en su razonamiento intuitivo (Tversky y Kahneman, 1973; citado en Azcárate, 1996). Dicha aproximación les induce a no valorar todas las posibilidades.

También es posible observar en este tipo de respuestas, acorde a autores como Salcedo y Mosquera (2008), la presencia del "heurístico de disponibilidad". Ya que la creencia de que son muchos más los comités de 2 personas que se pueden formar, hace que la probabilidad sea mayor.

En el caso del **ítem 17**, donde se solicita qué esquema permite un mayor número de trayectos, también aparecen algunas respuestas que involucran el "heurístico de accesibilidad o disponibilidad", haciendo una comparación del número de filas. Acorde a autores como Barragués et al. (2005), el punto está en estimar el número de trayectos atendiendo al aspecto de ambos esquemas. Un ejemplo de ello es la siguiente respuesta:

S1F2_L1487: … entonces aquí el plantea desde la primera fila a la última fila. Por lo tanto, voy solo por filas… ¿ya? …
S1F2_L1490: Entonces, como solo me hablan de filas… fila, fila, fila, por una cuestión "visual", la que tiene más filas es el esquema 2 (Punto 1). Ahora si lo vemos matemáticamente,
S7F2_L1496: La que tiene más filas es la dos…
S1F2_L1501: Ahora numéricamente, eh… al ir viendo todas las, las combinaciones es 8 elevado a 4. Por lo tanto, y la otra tiene 8 elevado a 3. Así que también concuerda.
S2F2_L1511: El segundo esquema 2.
S9F2_L1512: 4096 posibilidades.

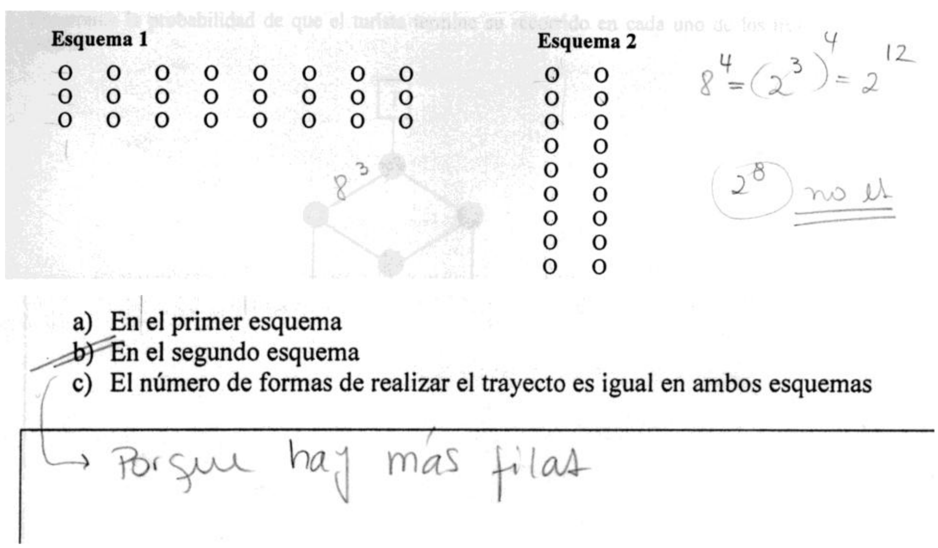


Imagen 4.19: Respuesta del sujeto 1 al ítem 17 escrita en el cuadernillo. Finalmente, establece que el segundo esquema tiene más posibilidades, ya que tiene "más filas".

Este tipo de situaciones han sido utilizadas en anteriores investigaciones (ver, por ejemplo, Kahneman, Slovic y Tversky, 1982; Barragués et al., 2005; Salcedo y Mosquera, 2008) para detectar las estrategias alternativas que presentan los sujetos al estimar las posibles combinaciones del espacio muestral. Fundamentalmente, aquellas centradas en observar las estrategias relacionadas con el "heurístico de accesibilidad o disponibilidad".

Criterio 3: "Razonamiento combinatorio formal"

En situaciones que involucran azar y probabilidades, en **contextos reales y cotidianos** y también de **juego**, justifican sus decisiones mediante un **razonamiento combinatorio formal** o **completo**. Este criterio se expresa en las categorías **CAT 7 y CAT 12B.**

Interpretación:

En este tipo de respuestas los docentes proponen razonamientos combinatorios completos, llegando incluso a escribir las expresiones formales, alcanzando claramente el objetivo propuesto. Algunos ejemplos de este tipo de razonamiento se muestran a continuación:

En el ítem 17, acorde a un razonamiento combinatorio, el sujeto responde la letra c), es decir, que el número de trayectos es igual en ambos esquemas: Esquema 1 (8^3=512) y esquema 2 (2^9=512)

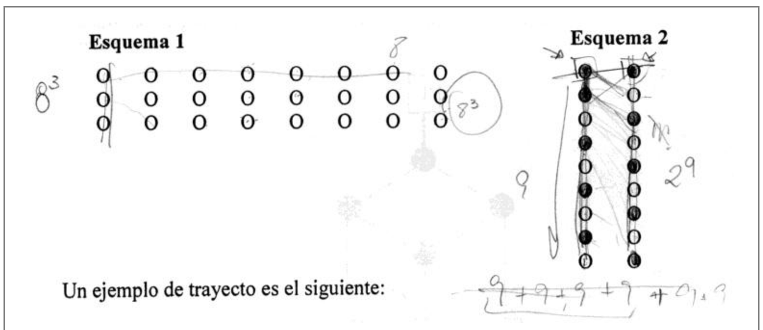


Imagen 4.20: Respuesta de sujeto S3 al ítem 17 en el cuadernillo.

Respecto del ítem 12, el sujeto señala que ambos resultados son igualmente probables (alternativa c). El sujeto argumenta su respuesta desde un razonamiento combinatorio completo.

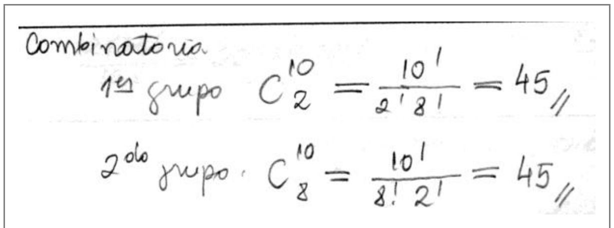


Imagen 4.21: Respuesta de sujeto S2 al ítem 12 en el cuadernillo.

S2E1_L503: Eh… si, si. Yo diría que al reconocer que era con combinatoria, no dudé en usar la fórmula.

Para la correcta resolución del problema de las comisiones de personas (ítem 12) es necesario saber construir el espacio muestral de las posibles combinaciones. En este caso se presenta una cierta dificultad para comprobar todas las combinaciones posibles de 10 elementos tomadas de “n” en “n”. Es por tanto necesario componerlo de forma comprensiva a través del coeficiente binomial C_n^m o de algún medio de representación como podría ser un diagrama de árbol. Por otra parte, es posible usar la propiedad de los números combinatorios $C_n^m = C_{m-n}^m$, sin tener que realizar cálculos. No obstante, esta propiedad no se observa en la práctica, sino más bien usando la fórmula C_n^m se calcula por separado y luego se comprueba que los resultados son iguales.

Es imprescindible el desarrollo de la capacidad combinatoria para la comprensión de la noción de probabilidad (Fischbein, Inhelder y Piaget, citados en Azcárate, 1996). Estos autores consideran el esquema de las operaciones combinatorias íntimamente ligado a la adquisición de un concepto operativo de la probabilidad. Otros muchos autores en sus investigaciones han detectado la relación entre el razonamiento combinatorio y el probabilístico, y las dificultades que el razonamiento combinatorio conlleva (Maury y Fayol, 1986; Cordier y Lecountre, 1990; Navarro-Pelayo, 1991; citados en Azcárate, 1996)

Criterio 4: "**Razonamiento que involucra la independencia de sucesos**"
En situaciones que involucran azar y probabilidades, en contextos de **juego**, justifican sus decisiones mediante un razonamiento que involucran el reconocimiento o no de la **independencia de sucesos**. Este criterio se expresa en las categorías **CAT 7**, **CAT 13A y CAT 13B.**

Interpretación:

En este tipo de respuestas los docentes proponen razonamientos, que de alguna manera involucran la independencia de sucesos. Por una parte reconocen que en un evento compuesto, por ejemplo, lanzar una moneda una cierta cantidad de veces (ítem 3.1), el siguiente lanzamiento es independiente del anterior, por lo tanto, la probabilidad de que "salga sello" sigue siendo ½. Por ejemplo, se tiene:

S7F1_L280: Pero son independientes…
S9F1_L286: Es un hecho independiente.

Sin embargo, en otros casos la independencia no se reconoce o bien se aplica incorrectamente. Por ejemplo:

S2F1_L263: Porque tengo la concepción de que las probabilidades de un suceso que se dé en forma simultánea las tengo que multiplicar…
S2F1_L268: va a ser muy poco probable para mí que salga sello…
(Discusión…)

S2F1_L270: incluso es menos de uno…
S2F1_L276: pero existen eventos anteriores…

No obstante en el caso del ítem 8, donde deben decidir cuál de las secuencias (lanzamiento 8 veces de una moneda) es más probable de ocurrir, por lo general se inclinan por la alternativa b) o c), coincidiendo con lo propuesto por Araya (2000). Todas las secuencias son igualmente probables, pero las personas que utilizan la "heurística de representatividad" tienden a predecir la que les parece más representativa aquella donde se equiparen las cantidades de sellos que de caras (Lavalle, Micheli y Boché, 2003).

Solo en un caso, en el que se aplica correctamente el concepto de independencia, se determina que las tres secuencias son igualmente probables. Por ejemplo, se tienen las siguientes respuestas:

> *S9E1_L344: La b) porque tiende al… a lo que decía en la probabilidad teórica del 50%, porque es poco probable que salgan puras caras… no imposible…*
> *S9E1_L349: Si. Más probable. La de abajo (c) también es posible.*
> *S9E1_L350: Pero no probable,… ¿o sería también probable?*
>
> *S9E1_L351: Si también es probable. Lo que pasa es que esta (c) es la más probable, porque tiende al 50% de la obtención de caras y sellos. Ahora, por la cantidad de tiros no podríamos decirlo con exactitud…*
> *S9E1_L352: Porque son ocho no más.*
> *S9E1_L353: Que no es lo mismo que lanzar 1000.*

O bien,

> *S3E1_L430: Yo en esta contesté que la más probable, que dentro de la más probable era la letra C. Porque no implicaba un… un… independiente de que la b) y la c) tiene la misma cantidad de caras y la misma cantidad de sellos… porque ambas tienen 4 y 4, según recuerdo, eh… la forma en la cual se van a mostrar los resultados… no… la letra b) me da la impresión de que es muy… muy… muy, cómo se diría,…. Manejada (risas) no sé…*

Llama la atención respuestas en las que aplican otros conocimientos (teorema del binomio – triángulo de Pascal, por ejemplo) para escoger una de las opciones:

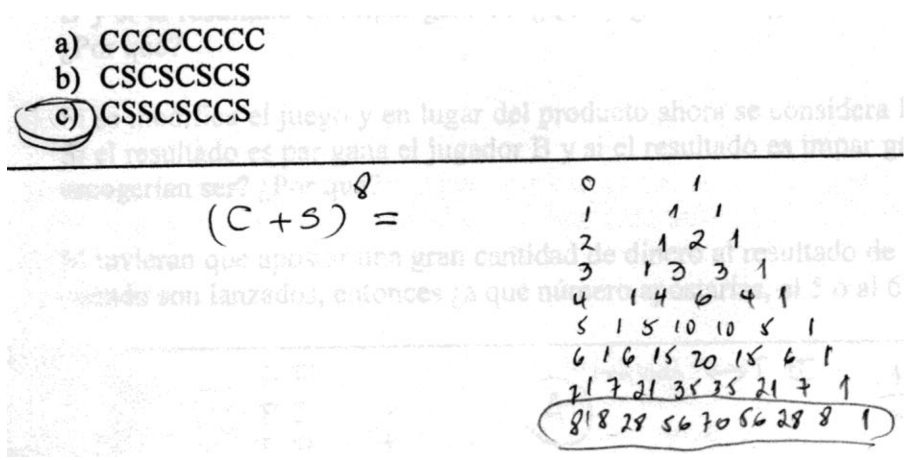
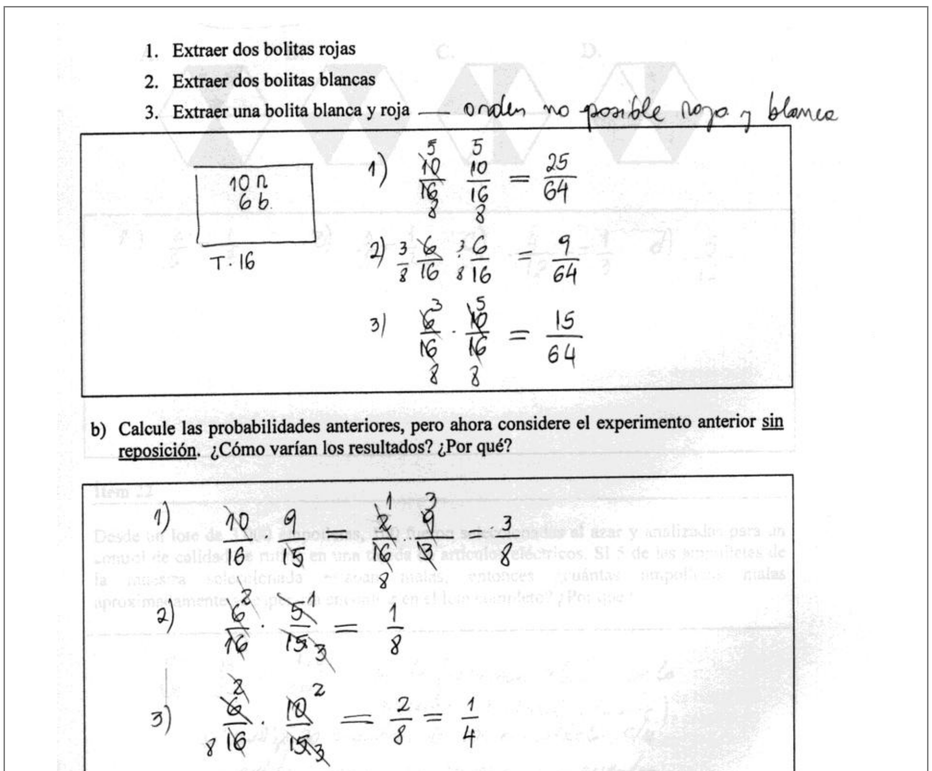


Imagen 4.22: Respuesta de sujeto S2 al ítem 8 en el cuadernillo.

En otros casos, en la reflexión los sujetos encuentran la respuesta al aplicar correctamente la independencia de sucesos. Por ejemplo:

> *S7E1_L1016: Es que yo lo pensé así. Si se lanza una moneda…. (Vuelve a leer) Yo tengo súper claro qué, en el fondo, si lanzo la moneda tengo una de dos… y si la tiro 8 veces consecutivas, entonces, va a ser $(1/2)^8$…*
> *S7E1_L1018: Y esas son las posibilidades totales…*
> *E1_L1020: ¿Y para qué caso es ese…?*
> *S7E1_L1022: Y ese es para… que salga… CCCCCCCC, que es el de arriba.*
> *E1_L1023: ¿Y el segundo?*
> *S7E1_L1024: (Se ríe)… Son iguales…*
> *S7E1_L1025: Y en el otro sería lo mismo….*
> *S7E1_L1026: Es $(1/2)^8$ y en la otra es lo mismo… que buena (se emociona)… son independientes…*

En situaciones como las del **ítem 20** en las que se proponen eventos compuestos, a través de la extracción de bolas de colores, en algunos casos se puede observar la aplicación del concepto de independencia, donde $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ cuando A y B son independientes. Por ejemplo:



1. **Extraer dos bolitas rojas**
2. **Extraer dos bolitas blancas**
3. **Extraer una bolita blanca y roja** — orden no posible roja y blanca

10 r
6 b
T · 16

1) $\frac{10}{16} \cdot \frac{10}{16} = \frac{25}{64}$

2) $\frac{6}{16} \cdot \frac{6}{16} = \frac{9}{64}$

3) $\frac{6}{16} \cdot \frac{10}{16} = \frac{15}{64}$

b) Calcule las probabilidades anteriores, pero ahora considere el experimento anterior sin reposición. ¿Cómo varían los resultados? ¿Por qué?

1) $\frac{10}{16} \cdot \frac{9}{15} = \frac{3}{8}$

2) $\frac{6}{16} \cdot \frac{5}{15} = \frac{1}{8}$

3) $\frac{6}{16} \cdot \frac{10}{15} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Imagen 4.23: Respuesta de sujeto S2 al ítem 20 en el cuadernillo.

Criterio 5: "**Razonamiento condicional intuitivo**"
En situaciones que involucran azar y probabilidades, en **contextos reales y cotidianos** y también de **juego**, justifican sus decisiones mediante un razonamiento que involucra la aplicación **intuitiva o incompleta** de la **probabilidad condicional**. Este criterio se expresa en las categorías **CAT 7**, **CAT 9A** y **CAT 13A.**

Interpretación:

En este tipo de respuestas los docentes proponen razonamientos condicionales intuitivos, no usando expresiones formales, o bien no alcanzan el objetivo propuesto. En esta parte de alguna manera utilizan representaciones visuales o esquemas para analizar el problema. Para el caso del **ítem 27**, en el cual se presenta una situación con cartas y figuras expresada en porcentajes, los sujetos recurren por ejemplo a diagramas de árbol o bien dibujos de las mismas cartas. Estas estrategias les sirven para interpretar correctamente los porcentajes y fracciones mencionadas. A partir de los dibujos de las cartas es posible interpretar de manera correcta las probabilidades solicitadas, contando casos "favorables" y casos "posibles". En este caso la idea es interpretar en forma concreta los porcentajes entregados y permitir que el conteo sea simple en el caso de probabilidades condicionales, acorde con el planteamiento Araya (2000). Las situaciones que involucran porcentajes se facilitan al traducirlas a frecuencias naturales (Araya, 2000; Gigerenzer, 2005). Un ejemplo de este tipo de razonamiento se muestra en la siguiente imagen:

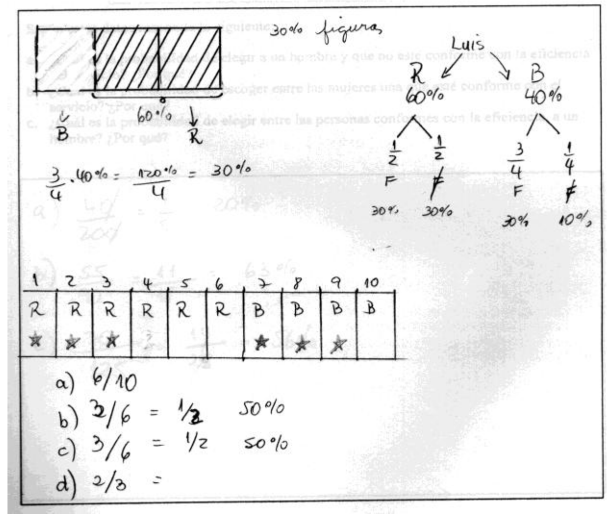


Imagen 4.24: Respuesta de sujeto S9 al ítem 27 en el cuadernillo.

En el caso de diagramas de árbol los sujetos tienden a buscar las probabilidades, ya sea a través de la multiplicación (cuando el trayecto va por una misma rama) o la suma (cuando los trayectos corresponden a distintas ramas), sin embargo, no hay mayores argumentaciones. Por ejemplo, se tiene la siguiente respuesta:

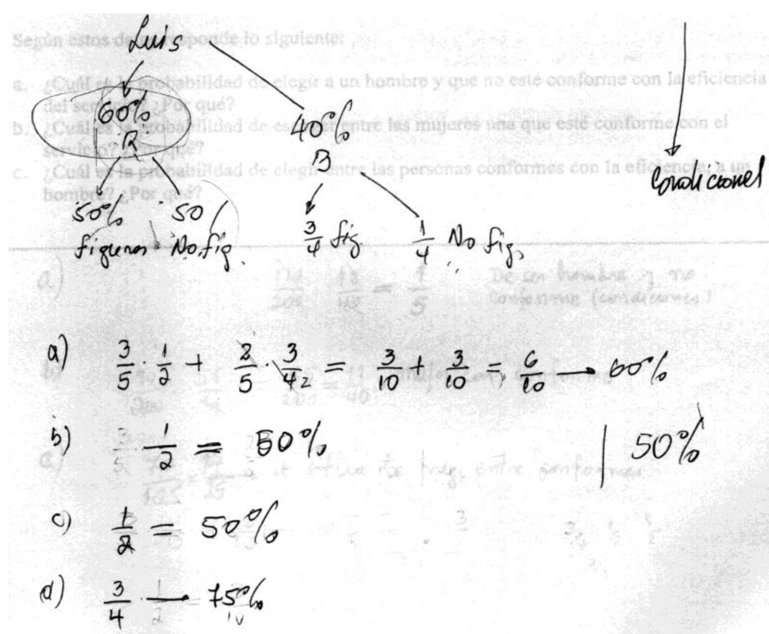


Imagen 4.2.7: Respuesta de sujeto S2 al ítem 27 en el cuadernillo. Utiliza diagramas de árbol en primera instancia, luego realiza cálculos basados en fórmulas.

La noción de probabilidad condicional es una herramienta básica de la teoría de probabilidades, y es lamentable que su gran sencillez de alguna manera quede oscurecida por una “torpe expresión singular” (Feller, citado por Gigerenzer, 2005). Lo que Feller ha llamado acertadamente una expresión “singularmente torpe”, además de ocultar la simplicidad básica de conceptos e ideas, fácilmente se presta para una mala interpretación intencional y no intencional de la información estadística de todo tipo (Gigerenzer, 2005). En palabras de Gigerenzer, el potencial de confusión se reduce fácilmente por el abandono de la notación convencional o "expresión singularmente torpe” de la probabilidad condicional, en favor de la presentación de la información en términos de las frecuencias naturales (Araya, 2000).

Criterio 6: “Razonamiento condicional formal”

En situaciones que involucran azar y probabilidades, en **contextos reales y cotidianos** y también de **juego**, justifican sus decisiones mediante un razonamiento completo que involucra **probabilidad condicional formal.** Este criterio se expresa en las categorías **CAT 7**, **CAT 9B** y **CAT 13B.**

Interpretación:

En este tipo de respuestas los docentes proponen razonamientos que usan probabilidad condicional, en forma completa y llegando incluso a escribir las expresiones formales. En el caso del ítem 27, los sujetos (exclusivamente profesores de media) realizan un gran esfuerzo para recordar las fórmulas de la probabilidad condicional que aprendieron alguna vez. Llama la atención que no les basta con una interpretación gráfica del problema, sino que necesitan establecer una expresión más formal para determinar la probabilidad. Por ejemplo, si A y B son dependientes: $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$. En la siguiente imagen se muestra este tipo de respuestas:

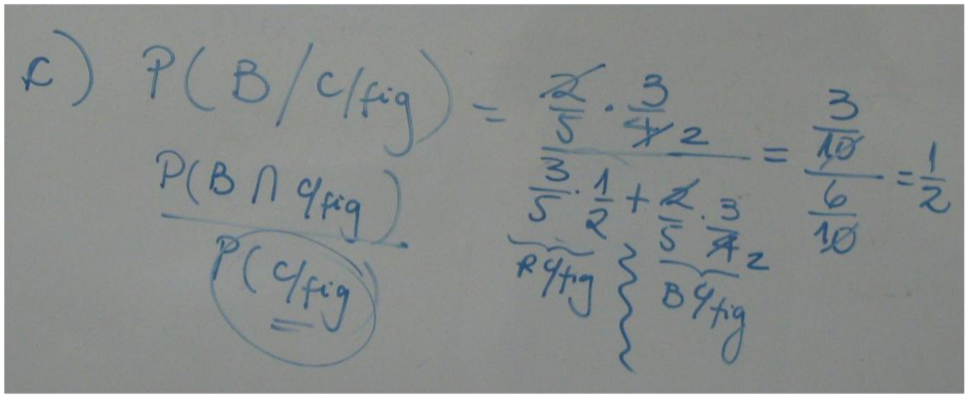


Imagen 4.26: Aplicación de la fórmula para obtener el resultado, escrita en la pizarra el día de la sesión 3 de grupo focal

A partir de respuestas registradas en el cuadernillo, se puede observar el uso de la expresión formal para la probabilidad condicional:

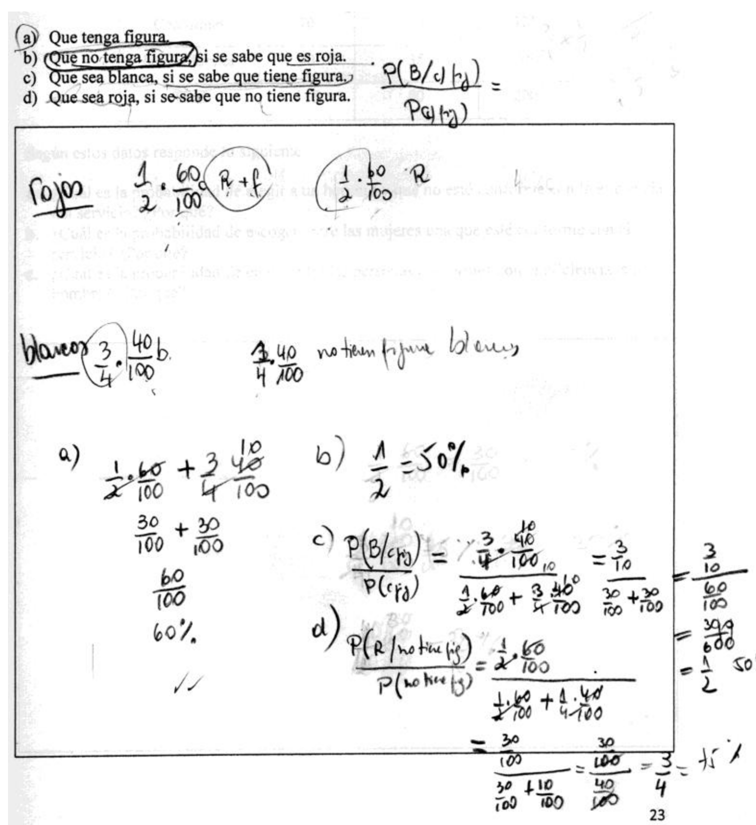


Imagen 4.27: Respuesta de sujeto S7 al ítem 27 en el cuadernillo.

4. Relaciones entre las concepciones y criterios de razonamiento de los profesores

Analizando cada una de las concepciones y criterios de razonamiento, es posible establecer ciertas relaciones a partir de algunas dicotomías (ejes organizadores). Por ejemplo, en el siguiente esquema se establece una relación cruzada entre los ejes “Azar/aleatoriedad - Probabilidad” y “Contextos reales y cotidianos – Contextos de juego”. A partir de esta organización se ubican las diferentes concepciones encontradas en algunos de los cuadrantes, o bien en la intersección de ellos.

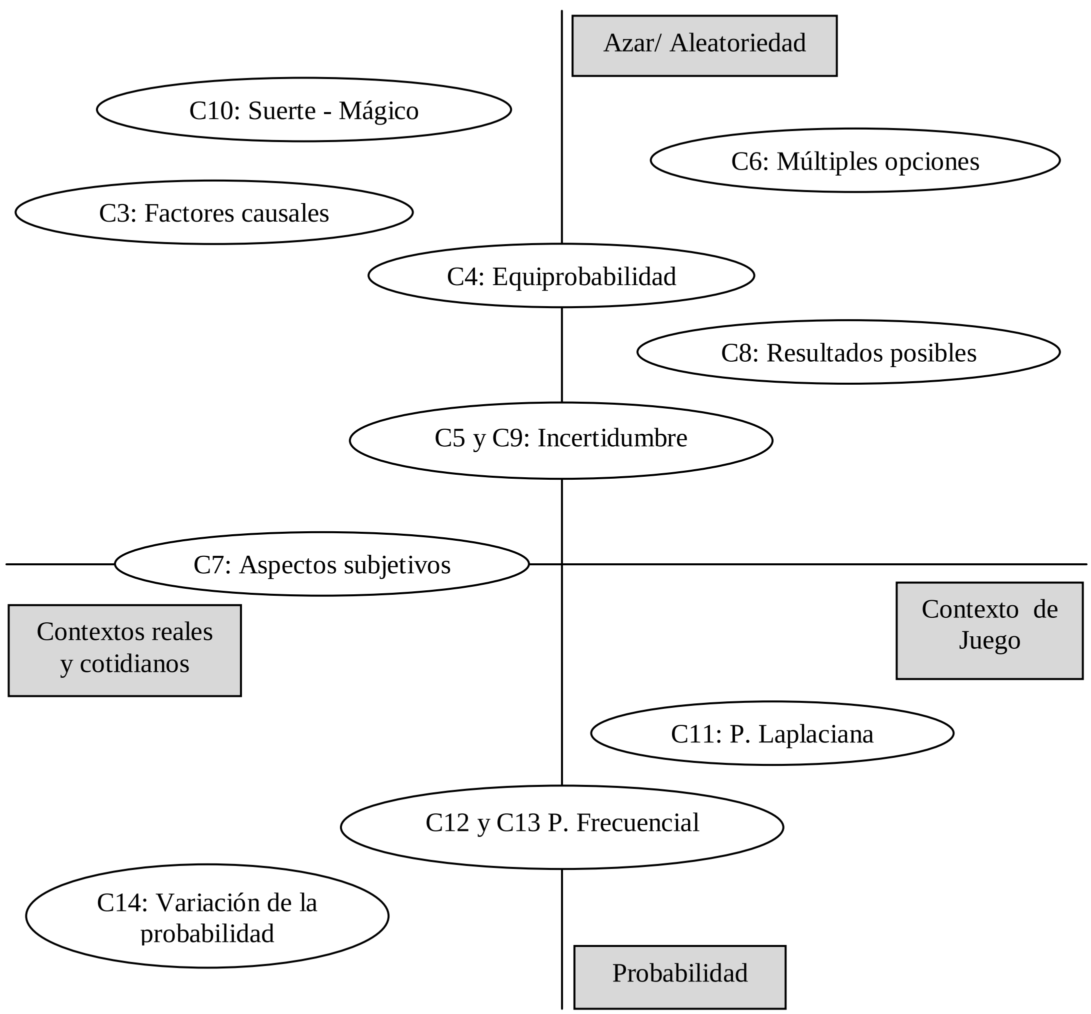


Figura 4.1: Concepciones versus contextos utilizados.

Acorde al análisis realizado, respecto a la dimensión **aleatoriedad/azar**, es posible observar concepciones exclusivamente asociadas a contextos reales y otras exclusivamente asociadas a contextos de juego. Sin embargo, también es posible detectar concepciones que son comunes a ambos tipos de contexto. Es el caso de la "incertidumbre" y la "equiprobabilidad". De aquí se muestra que el azar/aleatoriedad, independiente del contexto, es caracterizado por los docentes a partir de conceptos o categorías tales como la incertidumbre y la equiprobabilidad. En otras palabras, son descriptores del azar y la aleatoriedad.

En el caso de categorías como la "multiplicidad de opciones" y "resultados posibles", los docentes las utilizan claramente para describir la aleatoriedad en los contextos de juego. Esto tiene que ver, de alguna manera, por la facilidad en lo concreto de identificar el espacio muestral. Esta situación no es así necesariamente en los contextos reales y cotidianos.

Por su parte, todo lo que implique "causalidad" o bien "aspectos subjetivos", está asociado con situaciones en contextos reales y cotidianos. Estos descriptores no fueron utilizados por los docentes para el caso de contextos de juego. Los docentes tienden a dar argumentos, aun aceptando la aleatoriedad, en lo que se refleja la existencia de causas o condiciones que originan el fenómeno, o bien, argumentos que muestran la ausencia de dichas causas o condiciones. En el caso de elementos subjetivos, también en situaciones reales o cotidianas, hace entrever que de alguna manera los docentes, a partir de su experiencia, emiten juicios a favor de la aleatoriedad.

Para el caso de la dimensión **probabilidad**, también se observan concepciones asociadas exclusivamente a contextos reales y cotidianos, y otras a contextos de juego. Sin embargo, hay concepciones que se aprecian tanto en uno como otro contexto. Por ejemplo, es el caso de la "probabilidad frecuencial". Por ejemplo, a partir de información probabilística expresada en porcentajes, los docentes pueden interpretar de alguna manera su significado, incurriendo a veces en juicios subjetivos o en algún tipo de heurística. En contextos de juego, donde se muestra algún experimento aleatorio o simulación que se repite una gran cantidad de veces, los docentes son capaces de identificar tendencias o patrones en la información. A partir de la estabilidad de las frecuencias relativas pueden interpretar desde lo experimental o "a posteriori" algunas probabilidades.

En cuanto a la "probabilidad laplaciana", esta se muestra casi exclusivamente en los contextos de juego. En estas situaciones los docentes pueden identificar el espacio muestral y, a partir de la simetría de los resultados elementales, asumen la equiprobabilidad, luego aplican la conocida regla de Laplace para obtener "a priori" una estimación de la probabilidad.

Respecto a la concepción de "variación de la probabilidad", los docentes identifican en principio, a partir de su experiencia (elementos subjetivos), que la probabilidad de ocurrencia de cierto fenómeno puede modificarse, si se conoce más información. Posteriormente en el análisis de los "criterios o estrategias de razonamiento", se aprecia cómo los docentes trabajan la probabilidad condicional y, a partir de contextos de juego y también reales, verifican que la probabilidad se modifica y es posible determinar el nuevo valor, por ejemplo, usando el modelo de Laplace. En el siguiente esquema se establece una relación cruzada entre los ejes "Azar/Aleatoriedad - Determinismo" y "Contextos reales y cotidianos – Contextos de juego". A partir de esta organización se ubican las diferentes concepciones encontradas en algunos de los cuadrantes, o bien en la intersección de ellos.

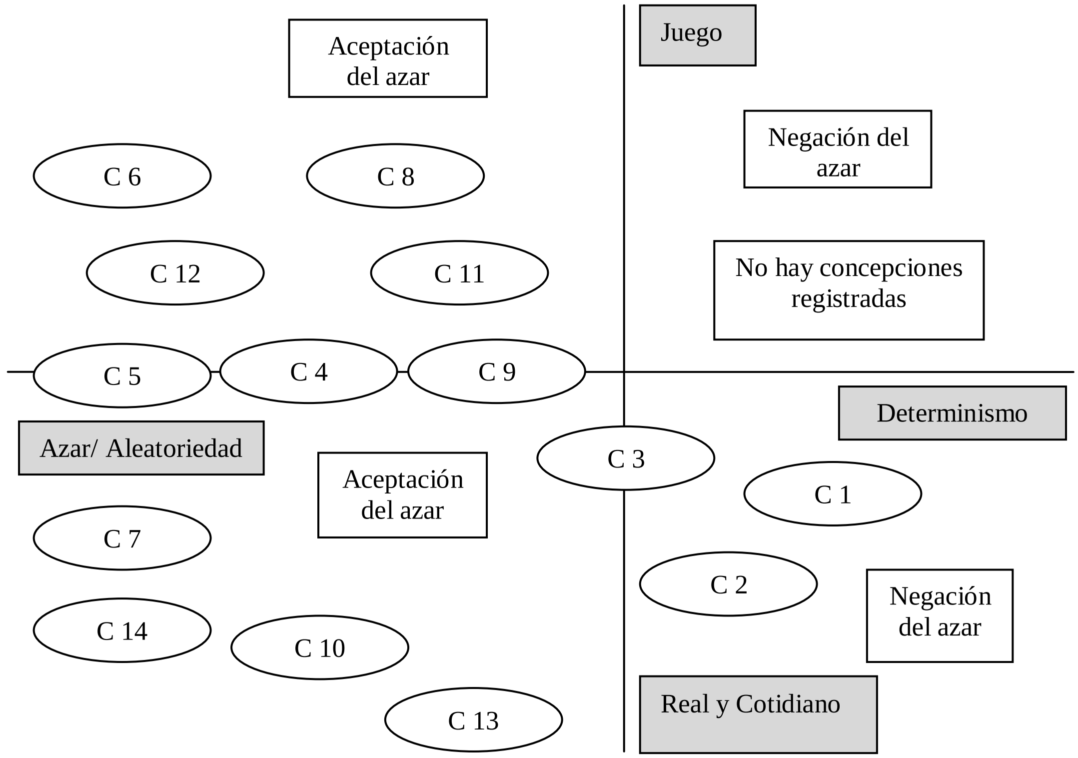


Figura 4.2: Azar – determinismo versus contextos utilizados

Acorde al análisis realizado, cabe destacar que solo en dos concepciones se registra una **negación del factor azar**. Específicamente se da en contextos reales y cotidianos. En este caso los docentes, bajo un sesgo determinista, asumen que un cierto fenómeno natural puede controlarse absolutamente a partir del manejo de las condiciones. En otra situación, si un fenómeno ya ocurrió, se asume que es algo seguro o determinado, aunque no se tenga información al respecto. Por su parte, en el caso de la concepción (C3) que relaciona "aleatoriedad y causalidad" se encuentra en una zona intermedia, pues a pesar de que los docentes reconocen que un fenómeno real o cotidiano es aleatorio, aún así lo relacionan con la existencia de causas o condiciones que favorecen o no su ocurrencia.

Se destaca el hecho de que en el caso del contexto de **juego**, no se registran concepciones relacionadas con la negación de azar. Los docentes asumen en estos casos plenamente que los eventos son aleatorios y, de alguna manera, se sienten en un terreno conocido para ellos.

El resto de las concepciones, la mayoría por cierto, tanto en contextos reales y cotidianos como contextos de juego, se identifican con una **aceptación del factor azar**. En algunos casos las concepciones se dan tanto en contextos reales y cotidianos como en contextos de juego (C5 y C9: incertidumbre, C4: equiprobabilidad).

En el siguiente esquema se establece una relación cruzada entre los ejes “Profesores básicos - Profesores de enseñanza media” y “Razonamiento intuitivo – Razonamiento formal”. A partir de esta organización se ubican los diferentes tipos de razonamiento encontrados en algunos de los cuadrantes, o bien en la intersección de ellos.

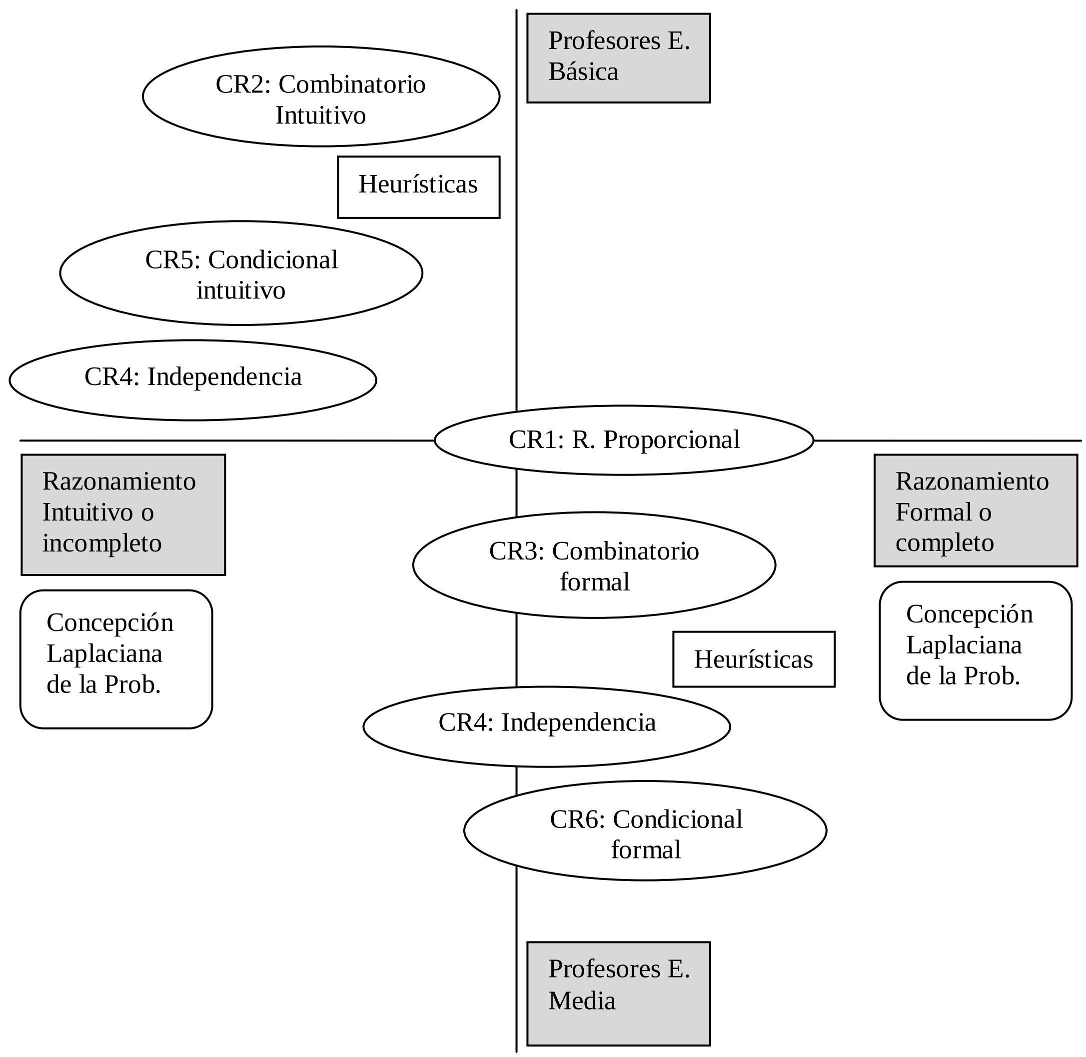


Figura 4.3: Tipos de razonamientos versus nivel de los profesores

Acorde al análisis realizado, en general, para profesores básicos el tipo de razonamiento registrado tiene más un carácter "intuitivo o incompleto" que formal. A diferencia de los profesores medios que se esfuerzan por mostrar un razonamiento más "formal y completo". No obstante, desde el punto de vista conceptual existen de todas formas algunos elementos intuitivos en los profesores secundarios.

En el caso de un "razonamiento proporcional", este tipo de estrategia lo manifiestan tanto profesores básicos como medios, en situaciones que ameriten el planteamiento de una proporcionalidad directa, por ejemplo. Por otra parte, se presentan algunos casos acorde a la explicación de Azcárate (1996). Es decir, la interpretación de información probabilística, dada en términos de porcentaje, como un valor exacto y no aproximado, semejante al sentido de la información proporcional en contextos aritméticos o geométricos.

En el caso de razonamientos que involucran la "independencia de sucesos" o "la combinatoria" para profesores básicos es claramente más intuitivo, en algunas oportunidades mostrando estrategias aditivas, sin embargo, para profesores de enseñanza media, el razonamiento va desde intuitivo a formal. Se destaca el hecho de que en ambos casos es posible observar ciertas **heurísticas** (disponibilidad o representatividad, por ejemplo) al momento de resolver ciertos problemas relacionados con probabilidad.

Finalmente, cabe destacar que los razonamientos observados estuvieron influenciados principalmente por una "concepción laplaciana de la probabilidad". Dado el tipo de problemas presentados, en general, cada vez que fue posible, los docentes aplicaron la "regla de Laplace" para resolver los problemas, identificando, previamente el espacio muestral y la equiprobabilidad de los eventos simples.

5. Dificultades para definir conceptos tales como azar, aleatoriedad y probabilidad

Tal como se ha revelado en las entrevistas con algunos de los docentes, conceptos tales como aleatoriedad, azar y probabilidad, efectivamente traen sus dificultades. Cosa que ya afirman autores tales como Azcárate (1995), Cardeñoso (2001) y Batanero (2006).

A partir del análisis de los datos es posible encontrar, de parte de los docentes, consideraciones respecto de las probabilidades como un área de enseñanza en la que las situaciones problemáticas, que deben enfrentar los estudiantes, a diferencia de otras áreas curriculares (álgebra, geometría o números), admiten más de una interpretación dependiendo de la lectura que se le haga. Es lo que genera un sentimiento de inseguridad en los sujetos al momento de responder a un problema. Algunos ejemplos pueden ser:

> *S2F2_L1032: ¿Por qué siempre pasa que en este tipo de… de ejercicios queda con la sensación de… (S7: uno duda…) queda con la sensación en el aire como que (S9: de que no era eso) que no era eso?*
> *S2F2_L1034: No pasa con los problemas de… (S7: de álgebra, de geometría, de nada…)*

O bien,

> *S1F3_L 607: El punto es que cualquiera explica algo y es… Pero en probabilidades todo el mundo lo duda dependiendo de cómo lo escriba…*
> *S4F3_L 609: … Todo depende de lo que dice el encabezado.*

Conceptualmente, al momento de definir términos como azar, aleatoriedad y probabilidad, existen dificultades y los docentes de alguna manera se aproximan, pero reconocen la falta de claridad en algunos temas. El concepto de aleatoriedad es, sin duda, el que más cuesta definir y tiende a confundirse con azar, en cuanto al grado de incertidumbre en los resultados. No obstante, los mismos docentes intentan establecer diferencias y catalogan el azar como un término "más amplio y popular", mientras que aleatorio es algo más "técnico". Lo aleatorio está relacionado con lo azaroso, sin embargo, contemplaría resultados dentro de un rango u orden o "espacio de posibilidades", según lo que los mismos docentes señalan.

Respecto a la probabilidad, los profesores la relacionan con la ocurrencia de los eventos. Se puede apreciar, por un lado, una noción frecuencial del concepto, estableciendo vínculos con la frecuencia relativa, mientras que por otro, aparece la noción laplaciana mediante el concepto de razón. Sin embargo, en algunos casos no es tan clara la definición. Llama la atención que al momento de definir la probabilidad, los docentes señalan algunas características, ya sea desde la noción frecuencial o desde la noción laplaciana. No obstante, no se aprecia una descripción explícita que señale que la probabilidad puede ser abordada desde diferentes enfoques. Por ejemplo, desde la "probabilidad clásica" (*a priori* o laplaciana), o bien desde la "probabilidad experimental" (frecuencial o *a posteriori*), o también desde una probabilidad "subjetiva". Tampoco se hizo referencia a alguna "probabilidad axiomática" y sus propiedades. En los siguientes cuadros se muestran algunas definiciones de aleatoriedad, azar y probabilidad entregadas por dos docentes de básica y dos de enseñanza media.

Cuadro 4.4: Concepto de aleatoriedad explicado por cuatro docentes

Sujeto / Nivel	Aleatoriedad	Concepción involucrada	Comentarios
S9 (B)	*S9E1_L174: Aleatorio es… siempre se me confunde el término… pero creo que es un hecho que no depende de… a ver que es como… incierto. Qué es incierto, que no sabemos si puede o no puede ocurrir, está relacionado con la palabra Azar.*	C5: Aleatoriedad e incertidumbre	Reconoce que el término le confunde, sin embargo, lo relaciona con lo incierto y el azar.
S3 (B)	*S3E1_L227: … no teníamos certeza… o sea que… yo creo que el término aleatorio es que de una u otra manera son situaciones que ocurren… sin tener ningún tipo de certeza así… O sea ocurre simplemente eh… no manejable en términos de variables ni nada por el estilo.* *S3E1_L236: … Puedo… decirles… escojan un número de los que están en la pizarra en forma aleatoria y… tengo…las posibilidades son menos, pero están dentro del grupo de los números que están en la pizarra.*	C5:Aleatoriedad e incertidumbre C6: Aleatoriedad y múltiples opciones	El sujeto relaciona aleatorio con la incertidumbre, con eventos no manejables. Sin embargo, agrega el hecho de que aún siendo incierta la ocurrencia de un evento, está de alguna manera acotada en un rango de posibilidades (múltiples opciones).

	S3E1_L237: … no hay una certeza de lo que va a suceder, en un espacio de… de posibilidades que tienen los niños.		
S2 (M)	*S2E1_L170: Yo diría que aleatorio es un evento que tiene… la equiprobabilidad, equisposibilidades, llamémosle así, de que siempre ocurra cada vez que yo lo haga. Independiente del lugar, el tiempo, y quien lo haga (siempre ocurra lo mismo). Siempre existe la posibilidad de que ese suceso ocurra con la misma posibilidad… aleatorio digamos.* *S2E1_L173: La palabra azar estaría incluyendo fenómenos que no son de Laplace. Y la palabra aleatorio es como que está dada más a esa parte, como que está más dada a las probabilidades que tú puedes estimar sin hacer el experimento.*	C4: Aleatoriedad y equiprobabilidad C8: Aleatoriedad y resultados posibles	El sujeto relaciona la aleatoriedad con la equiprobabilidad de los eventos. Pero además insinúa la idea de espacio muestral. Por otra parte establece una diferencia entre azar y aleatorio. Relacionando lo aleatorio exclusivamente con lo equiprobable y por lo mismo donde se puede aplicar Laplace. En cambio azar incluiría eventos no equiprobables (eventos que no son de Laplace).
S7 (M)	*S7E1_L250: ¡Ah!, eso que no se puede predecir su resultado…* *S7E1_L324: Es azaroso, claramente lo aleatorio. Pero se me imagina que está en una disposición, a eso me refiero… me entendís, está ordenado… tiene un orden. Me entendís…* *S7E1_L339: Eso creo yo…. Claro que uno lo puede predecir… pero está ya establecido… está ordenado de alguna manera.* *S7E1_L367: … claro ocurre azar… uno no sabe lo que va a pasar… pero está dentro establecido de ciertas… de algo seguro.*	C5: Aleatoriedad e incertidumbre C6: Aleatoriedad y múltiples opciones	A este sujeto le cuesta dar una definición clara. Sin embargo, establece una relación entre aleatorio e incertidumbre, pero además – diferenciando del azar – agrega el concepto de orden. El evento es azaroso pero ocurre dentro de algo seguro, dentro de cierto rango (ordenado).

Cuadro 4.5: Concepto de azar explicado por cuatro docentes

Sujeto / Nivel	**Azar**	Concepción involucrada	Comentarios
S9 (B)	*S9E1_L183: V: Azar es más grande… Al azar… también tiene que ver con la "incertidumbre", que puede o no puede suceder…*	C9: Azar como incertidumbre	El sujeto reconoce que el azar tiene que ver con la incertidumbre. Sin embargo, diferencia el

	S9E1_L187: … Tiene que ver con las probabilidades. *S9E1_L271: Yo creo que aleatorio es más difícil, más incierto…* *S9E1_L275: No hay, no… la verdad es que a mí se me confunden estos conceptos ¿ya?*		azar de lo aleatorio en cuanto a que el azar es “más grande”. Tiene que ver con las probabilidades, no obstante, reconoce que el término le confunde.
S3 (B)	*S3E1_L228: Yo creo que hay una relación fuerte entre lo que es aleatorio y lo que es azaroso independiente de que para mí la, las…lo azaroso está por… sobre lo aleatorio, porque independiente de que yo maneje todas las situaciones, siempre hay eh… el azar va a juzgar si va a suceder o no va a suceder una situación por… por algo sumamente impredecible. Para mí el azar es algo sumamente impredecible.* *S3E1_L238: … Para mí el azar es contrario a lo que es la predicción… independiente de que todas las… posibilidades apunten a lo contrario… para mí el azar siempre le da… da la sensación… da la posibilidad de que… no ocurra lo que nosotros queremos que ocurra.*	C9: Azar como incertidumbre	Este sujeto señala que “azar está por sobre lo aleatorio”. El azar es mucho más impredecible, no se puede controlar.
S2 (M)	*S2E1_L172: Ahora la palabra azar, yo creo que es una palabra que también se relaciona con esto pero es mucho más popular, más amplia. Asociada a los juegos… una palabra menos técnica quizá, pero también tiene que ver con el asunto de las probabilidades.*	C10: Azar como suerte	Expresa que azar es un término más popular, más amplio, asociado a los juegos. Sin embargo, siendo una palabra “menos técnica” está relacionada de todas formas con las probabilidades.
S7 (M)	*S7E1_L272: Es que el azar es algo que… no se predice pos. Y aleatorio te dije recién que tampoco se puede predecir… pero… yo creo que va dentro del tema como… que lo aleatorio juega así como en forma… eh… (Se prolonga el silencio)… a ver cómo te explico…* *S7E1_L 288: Pero son términos que están igual… son súper complicados separarlos uno y otro para mí.* *S7E1_L312: … Y el tema de aleatorio, para mí es como un experimento, algo que no sé, a mí siempre me ha costado ene definir ese cuento.*	C9: Azar como incertidumbre	Reconoce que los términos azar y aleatorio son difíciles de separar, le cuesta definirlos. Ambos tienen que ver con el hecho de que no se puede predecir. Sin embargo, establece como parámetro de diferencia el concepto de “desorden”. El azar es más desordenado, no se puede predecir lo que va a suceder (incertidumbre). En lo aleatorio hay un cierto

	S7E1_L366: Por eso te digo… o sea el azar es algo que no está establecido, está más relacionado con… Un desorden, o sea con lo que haya… me entendís… uno nunca sabe absolutamente nada. Pero a mí se… de aleatorio se me imagina, dentro de (un orden)		orden.

Cuadro 4.6: Concepto de probabilidad explicado por cuatro docentes

Sujeto /Nivel	**Probabilidad**	Concepción involucrada	Comentarios
S9 (B)	*S9E1_L265: La probabilidad es como el porcentaje que indica que un hecho suceda… y naturalmente que no suceda y probable no, si va a suceder o no va a suceder en qué porcentaje.*	C12_C13: Concepción frecuencial de la probabilidad	Establece la probabilidad como un indicador (porcentaje) de que un evento suceda o no suceda o bien en qué porcentaje.
S3 (B)	*S3E1_L352: El término de… qué significa el término de probabilidad… eh… que es probable… que se puede probar… que hay… a ver cómo los podríamos decir… que hay situaciones que prueban que va a suceder, algo así.* *S3E1_L358: Esa es la relación que veo yo. O sea en la medida que nosotros vamos…le vamos dando más probabilidad a un evento eh… va disminuyendo la… lo aleatorio de ese evento.*	C12_C13: Concepción frecuencial de la probabilidad	No es clara la explicación, ya que intenta asociar el término con “probar”. No obstante, se puede entrever un vínculo con la noción frecuencial. Por otra parte establece una especie de relación de “proporcionalidad inversa” entre probabilidad y el concepto de aleatorio.
S2 (M)	*S2E1_L281: Bueno yo tengo la concepción matemática ya pos. Para mi es una comparación entre lo favorable, dentro de los casos totales… Es una comparación, y una comparación es una razón y una razón se traduce en un porcentaje.*	C11: Concepción laplaciana de la probabilidad	Es clara la definición de la probabilidad desde el modelo de Laplace, considerando el concepto de razón.
S7 (M)	*S7E1_L406: Lo que pasa es que las probabilidades son también pos, están… son cosas que podrían ocurrir dentro de una agrupación de situa… o sea de… ocurrencias ¿ya? Eso pa’ mí es el tema… como algo que ocurre, la probabilidad de que esto suceda o no suceda.* *S7E1_L421: Lo que pasa es que la probabilidad es una razón pos, o sea si lo*	C12_C13: Concepción frecuencial de la probabilidad C11: Concepción laplaciana de la probabilidad	Relaciona la probabilidad con la ocurrencia o no ocurrencia de los eventos. Establece además un vínculo con la frecuencia relativa. A partir del concepto de razón, establece un vínculo con la regla de Laplace. Finalmente,

	observo así como la frecuencia relativa, y quien me va a dar los casos lo… lo las situaciones favorables a lo que yo… *S7E1_L432: Claro, porque si tú hacís la probabilidad también está dentro de un rango, de 0 a 1, por lo tanto, el 1 va a significar que ocurre que todo es certero, que ocurrió, completamente, te fijai, el otro no, por lo tanto, me voy a mover entre eso, si es que decís 0,5 en el fondo es decir, que la mitad de lo… que yo tenía ocurrió y la otra mitad no.*		establece la probabilidad en un rango de 0 a 1, donde “uno” señala la ocurrencia segura.

6. Comparación de los hallazgos del presente estudio con investigaciones anteriores

En relación con los resultados encontrados en la presente investigación, es posible establecer algunas comparaciones con estudios anteriores.

Respecto a los estudios de Moustagin (citado en Cardeñoso, 2001) en los años ochenta, con futuros profesores de matemática, donde sus resultados muestran que un número significativo de estudiantes utilizan estrategias heurísticas, para efectos del presente estudio con profesores de matemática – si bien no fue el foco el análisis de heurísticas – se puede señalar que en la resolución de los problemas sobre probabilidad presentados, fue posible observar heurísticas tales como la de disponibilidad y de representatividad.

Respecto a los estudios de Steinbring (citado en Cardeñoso, 2001) en los ochenta y noventa, quien señala que existen contradicciones entre las concepciones de los profesores acerca de la matemática y la precisión del contenido, y la propia característica “incierta” de los resultados del conocimiento estocástico – respecto a la presente investigación también ha sido posible detectar que los profesores tienen dificultades con las probabilidades, justamente por la naturaleza incierta de los resultados. En palabras de los mismos docentes, ellos se sienten más seguros en materias como álgebra o geometría, no así en probabilidades.

Acorde a los resultados de Russell (citado en Cardeñoso, 2001) en los noventa, quien detecta en los profesores estudiados una débil comprensión de las ideas estocásticas, respecto a la presente investigación es posible afirmar que acorde a la formación que han tenido - tanto en la universidad como los cursos de actualización docente – si bien no es un tema desconocido para ellos, incluso los profesores de media han enseñado probabilidades – aún requieren un mayor refuerzo conceptual. Ellos mismos reconocen no estar tan preparados para los nuevos desafíos curriculares.

Con relación a los estudios de Geer y Riston (citados en Cardeñoso, 2001), quienes concluyen que para profesores de primaria y secundaria la probabilidad es un área poco relevante del currículum, acorde a los resultados de esta investigación, los docentes reconocen, en general, que el eje de datos y azar si es relevante. No obstante, son contenidos que en la práctica se dejan para el final y por lo mismo no se alcanzan a pasar. En esto se reconoce que los profesores se sienten mejor preparados para materias tales como números, álgebra y geometría, no así probabilidades.

En relación con los resultados de Rubin y Roseberg (citados en Cardeñoso, 2001), en los noventa, ellos señalan que los profesores no están preparados para conectar el conocimiento estocástico con el mundo real, no solo por constituirse como una aplicación sino en lo que respecta a su propio significado. En el caso de los docentes investigados en el presente estudio, llama la atención que en los contextos de juego ellos se sienten con relativa comodidad en cuanto a un terreno conocido en el que se aplica la probabilidad. No obstante, en relación con los contextos reales y cotidianos no es tan directo el trabajo con las probabilidades y es un territorio más o menos desconocido en lo que respecta a aplicaciones. Es más, en algunas situaciones del estudio simplemente no se reconoce el evento natural como aleatorio. Sin duda esto tiene que ver con su formación académica.

Coincidiendo con los resultados de Fischbein (citado en Cardeñoso, 2001), en los noventa, es posible reconocer también las dificultades que tienen los profesores en el área de datos y azar, ya que el pensamiento probabilístico es intrínsecamente diferenciado del razonamiento determinista, bajo el cual los profesores han sido fundamentalmente formados. Por lo mismo, los docentes tienen más afinidad con materias tales como números, álgebra o geometría, según ellos mismos lo reconocen.

Respecto a los resultados de Pereira – Mendoza (citados en Cardeñoso, 2001), también hay coincidencia en relación a que hay una deficiente formación en el área de datos y azar, especialmente en los profesores primarios.

Acorde a estudios directamente relacionados con la presente investigación, como el de Azcárate (1995), es posible establecer algunas comparaciones relevantes. Con relación a las categorías propuestas en dicho estudio, ha sido posible confirmar en alguna medida dichos hallazgos. Por ejemplo, en la presente investigación se han corroborado las siguientes categorías:

1. Determinismo (no reconocimiento del azar o aleatoriedad)
2. Incertidumbre
3. Causalidad
4. Multiplicidad de opciones o posibilidades
5. Subjetivo o experiencial
6. Equiprobabilidad
7. Probabilidad laplaciana
8. Probabilidad frecuencial
9. Razonamientos proporcionales
10. Razonamientos aritméticos
11. Razonamientos combinatorios intuitivos o incompletos
12. Razonamientos combinatorios formales o completos
13. Azar como suerte o aspectos mágicos

Otras categorías tales como “transferencia de la estabilidad frecuencial del fenómeno al suceso simple o a la muestra” y “reconocimiento de la falta de información”, no fueron observadas en el presente estudio.

Acorde al modelo teórico propuesto por Azcárate (1995), en relación con las concepciones respecto al conocimiento probabilístico, considerando los profesores investigados en el presente estudio, tanto básicos como de enseñanza media, es posible detectar las siguientes: “Concepción probabilística intuitiva”, “emergente” y “normativa”. Principalmente esto se debe a que los profesores básicos estudiados tienen alguna formación en estadística y probabilidades, tanto en sus cursos universitarios como en cursos de actualización docente. Ellos trabajan aún desde su intuición, pero además se acercan en lo que pueden a modelos normativos (por ejemplo, uso de la regla o modelo de Laplace). Por su parte los profesores de enseñanza media tienen una mejor preparación, sin embargo, también se mueven desde su intuición a los modelos normativos. Tienen más herramientas para enfrentar problemas que involucren probabilidades. No obstante, es posible observar también en ellos algunas heurísticas como la de disponibilidad o representatividad.

Dado que el presente estudio ha sido de carácter cualitativo, con un grupo de nueve profesores de un mismo establecimiento, no ha sido parte de los objetivos analizar tendencias del pensamiento probabilístico de los profesores. Sin embargo, acorde a los resultados de Azcárate (1995), es posible establecer algunas relaciones con los hallazgos de la presente investigación.

Cuadro 4.7: Tendencias de Azcárate (1995) comparadas con la presente investigación.

Tendencia	Hallazgos en la presente investigación
Determinista	Esta forma de pensamiento se manifestó principalmente al momento de discutir fenómenos en contextos reales y cotidianos, por ejemplo, en el caso de la “germinación de una semilla”. Algunos profesores se inclinaron por la opción determinista, aludiendo a la posibilidad de control sobre el fenómeno.
Causal	Esta forma de pensamiento también se manifestó al momento de discutir

	fenómenos en contextos reales y cotidianos. Algunos profesores justifican la aleatoriedad a partir de la confluencia de causas o condiciones o bien la imposibilidad de establecer un control sobre ellas.
Incertidumbre	Esta forma de pensamiento se manifestó tanto en fenómenos en contextos reales y cotidianos como en contextos de juego. Se reconoce como una característica propia del azar o la aleatoriedad.
Indeciso	Si bien en las discusiones hubo momentos de indecisión, finalmente en el caso de fenómenos reales y cotidianos, los docentes tomaban parte o bien por el azar o bien por el determinismo.

En relación con los resultados de Pfannkuch y Brown (citados en Cardeñoso, 2001), ellos señalan que los sujetos manifiestan una tendencia al pensamiento determinista, de modo que involucran explicaciones causales respecto de las situaciones presentadas. Como ya se ha mencionado, en el presente estudio los docentes en contextos reales y cotidianos también argumentan desde explicaciones causales, ya sea reconociendo el fenómeno como aleatorio o determinista.

En acuerdo con Konold (citado por Cardeñoso, 2001), los sujetos usan el conocimiento probabilístico adecuado cuando razonan sobre situaciones que son claramente probabilísticas y tienen un espacio muestral simple. Por otra parte, ante situaciones del mundo real una gran parte de las explicaciones realizadas son bajo razonamiento causal que los sujetos extraen de su propia experiencia.

Es posible establecer algunas comparaciones relevantes con otro estudio muy relacionado con la presente investigación. Se trata del estudio de Cardeñoso (2001), basado en el estudio anterior de Azcárate (1995). Acorde a los resultados de Cardeñoso, en relación con las categorías definitivas propuestas (considerablemente un menor número que las de Azcárate), en la presente investigación ha sido también posible confirmar algunos de dichos hallazgos. Por ejemplo, se han corroborado las siguientes categorías (comparadas ya con las de Azcárate):

1. Aleatoriedad desde la causalidad
2. Aleatoriedad desde la multiplicidad de opciones
3. Aleatoriedad desde la incertidumbre
4. Aleatoriedad desde lo subjetivo
5. Concepción Laplaciana de la probabilidad
6. Concepción Frecuencial de la probabilidad
7. Estimación de la probabilidad desde la equiprobabilidad
8. Estimación de la probabilidad desde lo experiencial.

Cabe destacar que la categoría Contingencia[6], definida para el estudio de Cardeñoso, (2001) no fue observada en la presente investigación. Esta categoría que propone la comparación entre "casos favorables" y "casos desfavorables", ya ha sido enunciada por Peirce en los setenta. La contingencia relaciona mejor la creencia del sujeto, respecto a la regla de Laplace (Pierce, 1979; citado en Cardeñoso, 2001). La ausencia de esta categoría, puede deberse a que la regla de Laplace está suficientemente instalada en los docentes, tanto básicos como de enseñanza media.

Respecto a las tendencias de pensamiento, Cardeñoso (2001) propone algo similar a Azcárate (1995), sin embargo, detecta algunas nuevas. Como se dijo anteriormente, no ha sido propósito de esta investigación establecer tendencias de pensamiento. Sin embargo, es posible realizar una cierta correspondencia con lo propuesto por Cardeñoso:

Cuadro 4.8: Tendencias de Cardeñoso (2001) comparadas con la presente investigación

Tendencia	Hallazgos en la presente investigación
Determinista	Esta forma de pensamiento se manifestó principalmente al momento de discutir fenómenos en contextos reales y cotidianos, por ejemplo, en el caso de la "germinación de una semilla". Algunos profesores se inclinaron por la opción determinista, aludiendo a la posibilidad de control sobre el fenómeno.

[6] "Argumentaciones estimativas de cuantificación de la probabilidad basadas en la comparación entre casos favorables y desfavorables de un suceso" (Cardeñoso, 2001, p.245).

Contingencia	Esta forma de razonar no pudo ser observada acorde al trabajo realizado y las respuestas de los docentes, que en su mayoría, utilizan la regla de Laplace para resolver problemas donde el espacio muestral es relativamente sencillo y se puede asumir equiprobabilidad de los eventos simples.
Incertidumbre	Esta forma de pensamiento se manifestó tanto en contextos reales y cotidianos como en contextos de juego. Se reconoce como una característica propia del azar o la aleatoriedad.
Razonamiento personalista	Este razonamiento se manifestó específicamente en situaciones cuyos contextos eran reales y cotidianos. En particular, aparecieron temas subjetivos cuando se discutieron fenómenos meteorológicos.
Causal	Esta forma de pensamiento también se manifestó al momento de discutir fenómenos en contextos reales y cotidianos. Algunos profesores justifican la aleatoriedad a partir de la confluencia de causas o condiciones o bien la imposibilidad de establecer un control sobre ellas.

En acuerdo con Cardeñoso (2001), desde los resultados obtenidos en la presente investigación, es posible señalar que los profesores, particularmente los de básica, requieren una mayor preparación respecto a los contenidos de estadística y probabilidad para realizar adecuadamente clases respecto a estos tópicos. Del mismo modo los profesores de media también reconocieron tener falencias tanto a nivel conceptual como metodológico.

En relación con los resultados de Barragués et. al (2005) y acorde a los hallazgos de la presente investigación, ha sido posible detectar algunas heurísticas en el razonamiento de los profesores (disponibilidad, representatividad, por ejemplo). Por otra parte, respecto a situaciones reales y cotidianas, se puede concluir que es más complejo desarrollar un razonamiento normativo en vistas de obtener un modelo teórico.

Comparando la investigación de Ortiz et. al (2006) con los hallazgos del presente estudio, es posible señalar que los docentes investigados, acorde a los problemas presentados, usan el razonamiento combinatorio, estableciendo en general estrategias multiplicativas y correspondencias. No obstante, en algunos casos se observan estrategias aditivas.

Respecto a la investigación de Liu y Thompson (2007), quienes desarrollan un marco teórico en relación al pensamiento probabilístico de profesores, y establecen rutas acorde a una concepción “estocástica” de la probabilidad y también a una concepción “no estocástica”. En la presente investigación se hacen más patentes, en los términos de Liu y Thompson (2007), caminos de una concepción más bien “no estocástica” al momento de resolver problemas que involucran probabilidad. Es decir, de acuerdo al siguiente cuadro los docentes optan por significados de la probabilidad tales como: 4, 5, 6, 7, 8 o 9. Salvo cuando las situaciones propuestas son experimentos aleatorios que explícitamente proponen procesos repetibles, es posible, observar que los docentes identifican con una secuencia del tipo 1 – 2 – 3 – 10.

Cuadro 4.9: Marco teórico sobre probabilidad según Liu y Thompson (2007)

Caminos (secuencias) de pensamiento (razonamiento)	1	Q1	¿Hay una imagen de un proceso repetible?
	2	Q2	¿Están las condiciones del proceso especificado?
	3	Q3	¿Hay una imagen de una distribución de los resultados?
Significados de la probabilidad	4	OA	Una aproximación al resultado
	5	ANA	El resultado es A o no-A, esto es la probabilidad igual a 1 o 0
Interpretaciones de comportamientos observables acerca de la probabilidad	6	PH	Heurística de proporcionalidad
	7	ANA	El resultado es A o no-A, esto es la probabilidad igual a 50%
	8	APV	La probabilidad es una proporción relativa: todos los posibles valores de las variables aleatorias.
	9	APO	La probabilidad es una proporción relativa: todos los posibles resultados.
	10	RF	La probabilidad es una frecuencia relativa: Distribución de todos los resultados.

En concordancia con los resultados de Salcedo y Mosquera (2008), quienes también plantean algunos problemas que involucran razonamiento combinatorio, es posible detectar en los sujetos el sesgo de la disponibilidad en las respuestas entregadas.

7. Hallazgos de la presente investigación respecto de los objetivos planteados

Acorde a los objetivos de esta investigación, cabe recordar que se formularon en cuanto un objetivo general y algunos específicos. En relación al objetivo general *"Develar aquellas concepciones relativas a los conceptos de azar y probabilidad, así como también los criterios o estrategias de razonamiento, utilizados frente a situaciones problemáticas que involucran dichos contenidos, en profesores que realizan clases en los niveles de 5° a 8° básico, en un colegio de la comuna de Puente Alto"*, respecto a los resultados de la presente investigación, fue posible develar un conjunto de catorce concepciones en torno a los conceptos de azar, aleatoriedad y probabilidad, más seis criterios de razonamiento en cuanto a la resolución de problemas sobre probabilidad.

En relación con el primer objetivo específico "*Identificar y caracterizar concepciones relativas a los conceptos de azar y aleatoriedad*", acorde a la investigación realizada se encontraron y caracterizaron las siguientes concepciones:

C1: Negación del azar en fenómenos reales y cotidianos
C2: Negación del azar en situaciones y fenómenos ya ocurridos.
C3: Aleatoriedad y factores causales
C4: Aleatoriedad y equiprobabilidad
C5: Aleatoriedad e incertidumbre
C6: Aleatoriedad y múltiples opciones
C7: Aleatoriedad y aspectos subjetivos
C8: Aleatoriedad y resultados posibles
C9: Azar como incertidumbre
C10: Azar como suerte – mágico

En relación con el segundo objetivo específico "*Identificar y caracterizar concepciones relativas al concepto de probabilidad*", acorde a la investigación realizada se encontraron y caracterizaron las siguientes concepciones:

C11: Concepción laplaciana de la probabilidad
C12: Concepción frecuencial de la probabilidad en contextos de juego
C13: Concepción frecuencial de la probabilidad en contextos reales y cotidianos
C14: Variación de la probabilidad si es que se conoce información

En relación con el tercer objetivo específico "*Identificar y caracterizar algunos criterios o estrategias que utilizan para justificar sus decisiones, frente a situaciones problemáticas que involucren azar y probabilidades*", acorde a la investigación realizada se encontraron y caracterizaron los siguientes criterios o estrategias de razonamiento:

CR1: Razonamiento proporcional
CR2: Razonamiento combinatorio intuitivo
CR3: Razonamiento combinatorio formal
CR4: Razonamiento que involucra independencia de sucesos
CR5: Razonamiento condicional intuitivo
CR6: Razonamiento condicional formal

CAPITULO V: CONCLUSIONES

> *"Enseñar probabilidades no puede limitarse solo a enseñar estructuras conceptuales y herramientas para la resolución de problemas". Es necesario desarrollar maneras de razonamiento y un sistema robusto de desarrollo de la intuición. El razonamiento probabilístico es diferente del lógico o del razonamiento causal..."* (Romagnoli, 2011, p. 19).

1. Contexto, antecedentes y los hallazgos

El presente estudio se ha enmarcado en una línea de investigación relacionada con las concepciones de los docentes acerca del azar y las probabilidades. En este contexto, cabe destacar que las creencias y concepciones de los profesores ocupan un lugar relevante en la literatura sobre educación matemática (Cardeñoso, 2001). El interés por estudiar estos temas se apoya en el supuesto de que dicho sustrato conceptual representa un papel esencial tanto en el pensamiento como en la acción del profesor (Chapman, 1993; citado en Cardeñoso, 2001).

Acorde a la revisión de literatura, estudios sobre concepciones se pueden encontrar en trabajos tales como Thompson (1992), Hoyles (1992), Azcárate (1995), Cardeñoso (2001), Pérez y Guillén (2007), Moreano et al. (2008), entre otros. En estos estudios es posible identificar una terminología diversa con el fin de representar las ideas de los profesores: creencias, teorías implícitas, representaciones, conocimiento o concepciones. Respecto a teorías implícitas se puede citar trabajos tales como Porlán et al. (1997) y Pozo et al. (2006).

Se ha investigado acerca de distintos tipos de concepciones. Por ejemplo, están aquellas investigaciones cuyo foco es el estudio de los profesores en relación con los contenidos matemáticos que deben enseñar. Como señala Cardeñoso (2001), dichas investigaciones están orientadas a temas propios del conocimiento numérico, en menor número al conocimiento geométrico o de magnitudes, y significativamente menor en lo que se refiere al conocimiento estocástico.

Acorde a la revisión de literatura efectuada para el presente estudio, en Chile esta línea de investigación ha sido poco desarrollada en comparación con otros países, como por ejemplo España. En dicho país existen estudios desde los años noventa sobre concepciones acerca del azar y las probabilidades, en docentes y futuros docentes, coincidiendo además con algunas reformas curriculares en dicha nación. Cabe mencionar, que nuestro país ha estado enfrentando una serie de ajustes curriculares desde el año 2009, en los cuales "Datos y Azar" es un eje nuevo, especialmente en lo que respecta al tema de las probabilidades desde los niveles básicos.

El marco curricular actual propone un eje de "Datos y Azar" que va desde 1° básico a 4° medio en el plan general, con énfasis en las probabilidades desde 5° básico. Por su lado, las nuevas bases curriculares de básica (propuesta 2012 aprobada por el CNE), si bien incorporan modificaciones, existe un eje de "Datos y Probabilidades" desde 1° básico. Los docentes, particularmente de básica, recién comienzan a enseñar estas materias. En el caso de los profesores de media han enseñado Probabilidades, sin embargo, con poca o nula conexión con la Estadística (Araya, 2001). Ahora deben enseñarlas desde niveles como 7° y 8° básico.

Acorde a los antecedentes de esta investigación, los estudios previos más influyentes han sido los trabajos de Azcárate (1995) y Cardeñoso (2001), considerando además otras investigaciones de ambos autores. Los resultados de la presente investigación confirman algunos de sus hallazgos, comenzando por las categorías utilizadas. Este estudio se basó principalmente en la propuesta de Azcárate, como un trabajo fundamentalmente exploratorio, sin embargo, la investigación de Cardeñoso permitió reafirmar un subconjunto de categorías comunes a ambos estudios previos, las que a través de la presente investigación se pusieron a prueba con el grupo de docentes que participaron.

Llama la atención que la categoría "Contingencia", descrita por Azcárate (1995) y usada por Cardeñoso (2001), no fue posible detectarla en este estudio. Dicha categoría ha sido descrita en los estudios previos de la siguiente manera: "*argumentaciones estimativas de cuantificación de la probabilidad basadas en la comparación entre casos favorables y desfavorables de un suceso*" (Cardeñoso, 2001, p.245). Una de las razones, de la ausencia de datos clasificables en ella, puede ser por la formación que han recibido tanto docentes medios como básicos, donde la "regla de Laplace" (razón entre casos favorables y casos posibles) está lo suficientemente instalada. Luego no ha sido posible observar razonamientos alternativos, por ejemplo, establecer alguna comparación entre casos favorables y casos desfavorables, acorde al planteamiento de Pierce, en los setenta. La contingencia relaciona mejor la creencia del sujeto, respecto a la regla de Laplace (Pierce, 1979; citado en Cardeñoso, 2001).

En concordancia con los estudios de Azcárate (1995) y Cardeñoso (2001), los argumentos que presentan los sujetos, considerados en este estudio, para justificar la **no - aleatoriedad** o determinismo se pueden agrupar en:

a) Ser el resultado de un proceso sobre el que se conocen las causas que lo originan, considerando despreciable la influencia del azar.
b) La posibilidad de actuar sobre él y controlar las condiciones de su ocurrencia.

Lo anterior tiene que ver con la creencia de los sujetos de que es posible neutralizar o influir en el factor "azar", controlando las condiciones de ocurrencia de los fenómenos (Fischbein, Nello y Marino, 1991; Serrano, 1993; citados en Azcárate, 1996).

Coincidiendo con los resultados de Azcárate (1995), en las situaciones "meteorológicas" que aluden a hechos pasados, los sujetos participantes de esta investigación dan por sentado que se trata de algo seguro o determinado, aún cuando personalmente no se tenga información sobre lo que realmente aconteció. A diferencia de los resultados de Azcárate, aquí no se produjo una dicotomía en donde, por ejemplo, respecto al ítem 1.5 ("Llovió en Santiago el 3 de abril de 2009"), hubiese sujetos que catalogaran la situación como aleatoria considerando que, aún cuando el fenómeno ya ocurrió, la falta de información respecto del mismo lo convierte en un evento aleatorio.

Por su lado, respecto de los **fenómenos aleatorios**, también en concordancia con los resultados de Azcárate (1995) y Cardeñoso (2001), en la presente investigación las respuestas de los docentes se pueden agrupar según lo siguiente:

a) Caracterizar la aleatoriedad como algo incierto, impredecible, que no se sabe lo que va a pasar.
b) Aludir a ciertos factores causales (condiciones) o bien a la falta de control sobre dichas causas. En otras palabras, usar presupuestos deterministas.
c) Involucrar aspectos como la equiprobabilidad y algunas explicaciones desde la incertidumbre.

2. Concepciones, alcances y limitaciones del estudio y la respuesta a la pregunta de investigación

Cabe recordar que, a partir de las definiciones de Thompson (1992), Ponte (1994) y Remesal (citado en Moreano et al., 2008), para efectos de este estudio una "concepción" se ha entendido como: *"Una estructura general de pensamiento que incluye significados, conceptos, imágenes mentales, preferencias, reglas y creencias del profesor, tanto globalmente como sobre un determinado tópico, que condicionan la forma en que afrontan las tareas de la enseñanza. Estas se originan y desarrollan a través de las experiencias e interacciones con la realidad".*

Uno de los aportes de esta investigación, acorde a los objetivos propuestos y a la definición de concepción adoptada, ha sido el hecho de describir un conjunto de **concepciones** (14) **y criterios** o **estrategias de razonamiento** (6) en la resolución de problemas relacionados con lo aleatorio y las probabilidades. Estas concepciones y criterios, que surgieron a partir de las categorías iniciales, pretenden explicar en forma más elaborada y detallada, de acuerdo a los contextos usados, la manera en que los profesores conciben el azar y las probabilidades y cómo éstos enfrentan algunos tipos de problemas con dichos contenidos. Notar que cada concepción o criterio se relaciona con una o más categorías.

Es importante señalar que este ha sido un estudio exploratorio, dentro del ámbito nacional, realizado con un grupo de nueve profesores de un colegio particular con financiamiento compartido de la comuna de Puente Alto. Por lo tanto, no ha sido parte de los objetivos establecer algún tipo de generalización o tendencia respecto al pensamiento de los profesores, tal y como lo hacen los estudios previos. Sin embargo, ha dado un puntapié inicial para explorar de qué manera los docentes conciben el azar y las probabilidades, acorde a su experiencia y las tareas desempeñadas en el aula, además de las formas de razonamiento que utilizan en contextos de incertidumbre.

Acorde al modelo teórico propuesto por Azcárate (1995), respecto del conocimiento probabilístico, considerando los profesores investigados en el presente estudio, ha sido posible detectar las siguientes: **concepción probabilística intuitiva, emergente y normativa**. Esto se debe a que los profesores – tanto los de enseñanza básica como los de enseñanza media - tienen nociones de Probabilidad y Estadística, desde sus estudios de pregrado y también considerando algunos cursos de actualización docente. Debe mencionarse que, a raíz de los ajustes curriculares del país, los colegios están preocupados por capacitar, de alguna manera, a los docentes en los nuevos contenidos que deben tratarse en las aulas. No obstante, esto nunca es suficiente y tal como lo han manifestado los propios profesores del estudio, ellos requieren una mayor preparación.

Como ya se ha dicho, no fue propósito de este estudio determinar tendencias del pensamiento probabilístico de los profesores, no obstante, acorde a los resultados encontrados, es posible establecer algunas relaciones con los resultados obtenidos por Azcárate (1995) y Cardeñoso (2001) en el siguiente cuadro:

Cuadro 5.1: Comparación de las tendencias de Azcárate (1995) y Cardeñoso (2001) con algunos hallazgos de la presente investigación.

Tendencias estudio de Azcárate (1995)	Tendencias estudio de Cardeñoso (2001)	Relación con los hallazgos de la presente investigación
Determinista	Determinista	Fue observada en situaciones que involucran contextos reales y cotidianos (negación del azar)
Incertidumbre	Incertidumbre	Fue observada en situaciones que involucran tanto contextos de juego como contextos reales y cotidianos (aceptación del azar)
Razonamiento causal	Razonamiento causal	Fue observada en situaciones que involucran contextos reales y cotidianos (aceptación del azar, pero existen causas o condiciones que favorecen o no el fenómeno, o bien el desconocimiento de dichas causas)
Indeciso	No utilizada	No utilizada
No utilizada	Contingencia	No utilizada
No utilizada	Razonamiento personalista	Fue observada en situaciones que involucran contextos reales y cotidianos (concepción frecuencial de la probabilidad)

Acorde a los resultados del estudio y respondiendo a las preguntas que orientan la investigación: *¿Qué concepciones acerca del azar y las probabilidades expresan profesores de matemática, que realizan clases en los niveles de 5° a 8° básico, en un colegio de la comuna de Puente Alto? ¿Cómo razonan dichos docentes frente a situaciones problemáticas que involucran azar y probabilidades?*, en el siguiente cuadro se describen las concepciones encontradas:

Cuadro 5.2: Concepciones de los docentes encontradas en la investigación

Concepción	Nombre	Contextos	Categorías asociadas
1	"Negación del azar en fenómenos reales y cotidianos"	Real y cotidiano	CAT 1
2	"Negación del azar en situaciones o fenómenos ya ocurridos"	Real y cotidiano	CAT 1
3	"Aleatoriedad y factores causales".	Real y cotidiano	CAT 2, CAT 3
4	"Aleatoriedad y equiprobabilidad".	Juego - real y cotidiano	CAT 2, CAT 6
5	"Aleatoriedad e incertidumbre"	Juego - real y cotidiano	CAT 2

6	"Aleatoriedad y múltiples opciones"	Juego	CAT 4
7	"Aleatoriedad y aspectos subjetivos"	Juego /real y cotidiano	CAT 5A, CAT 2.
8	"Aleatoriedad y resultados posibles"	Juego	CAT 3, CAT 6.
9	"Azar como incertidumbre"	Juego /real y cotidiano	CAT 2
10	"Azar como suerte o algo mágico"	Juego /real y cotidiano	CAT 14
11	"Concepción laplaciana de la probabilidad"	Juego	CAT 7
12	"Concepción frecuencial de la probabilidad en contextos de juego"	Juego	CAT 8
13	"Concepción frecuencial de la probabilidad en contextos reales y cotidianos"	Real y cotidiano	CAT 5B, CAT 8
14	"Variación de la probabilidad si se conoce información"	Real y cotidiano	CAT 2, CAT 3 y CAT 9A.

Por otra parte, se identificaron los siguientes criterios o estrategias de razonamiento en situaciones problemáticas que involucran azar y probabilidades:

Cuadro 5.3: Criterios o estrategias de razonamiento de los docentes

Criterio	Nombre	Contexto	Categoría asociada
1	"Racionamiento proporcional"	Real y cotidiano	CAT 10
2	"Razonamiento combinatorio intuitivo"	Juego /real y cotidiano	CAT 7, CAT 11 y CAT 12A
3	"Razonamiento combinatorio formal"	Juego /real y cotidiano	CAT 7, CAT 12B
4	"Razonamiento que involucra la independencia de sucesos"	Juego	CAT 7, CAT 13A y CAT 13B
5	"Razonamiento condicional intuitivo"	Juego /real y cotidiano	CAT 7, CAT9A y CAT 13A
6	"Razonamiento condicional formal"	Juego /real y cotidiano	CAT 7, CAT9A y CAT 13B

Cabe mencionar que las concepciones encontradas, en algunos casos se han correspondido con las grandes concepciones acerca del azar descritas en el Capítulo II de este estudio:

- Un azar más epistemológico o producto de la ignorancia (Discurso de la Ignorancia). Por ejemplo, bajo los siguientes presupuestos deterministas está implícita la concepción de que el azar es simple falta de información:

  S2F1_L12: "no porque son fenómenos determinados". Yo determino, va a plantarla para que germine… Yo la riego, yo la planto… yo determino las condiciones (ítem 1.1.-).
  S2F1_L135: Porque si yo veo la presión, y veo todos los cambios que hay… (ítem 1.6.-).

- Un azar más ontológico, absoluto o independiente, o bien como parte de la complejidad de la realidad. Por ejemplo:

  S3F1_L175: Yo pienso que el azar es absolutamente lo contrario a eso... en términos de que de una u otra manera el azar a mí me dice de que ***independiente*** *de que yo que yo reproduzca las mismas condiciones aquí y en la quebrada del ají, tengo todavía posibilidades de que no resulte igual. Tengo todas las posibilidades de que no resulte de la misma manera. Porque el azar te da ese margen (no sé cómo llamarlo, margen de error)*

- Como el cruce de causas independientes o una causalidad necesaria (Discurso Azar/Necesidad). Causas que favorecen o no a los fenómenos, o bien alusión al desconocimiento de dichas causas. Por ejemplo, se tienen los siguientes presupuestos deterministas:

  S3F1_L6: Ya que el hecho de que se plante en un lugar u otro, va a favorecer que esta germine o no. Por lo mismo, No se tira una semilla, se tiran varias. (Ítem 1.1.-).
  S7F1_L25: No sabemos si están todas las condiciones (Ítem 1.1.-).
  S4 F1_L31: Depende de las condiciones… (Ítem 1.1.-).

- Como causa desconocida (Discurso del Orden), o bien como producto de la Divinidad. En la discusión aparecieron algunos elementos relacionados con la suerte, o demoniaco, o bien divino, o en términos más culturales. Por ejemplo:

  S3F1_L196: el azar lo relacionan con la parte suerte. Se relaciona con la suerte pero en un término (como que na' que ver) más "demoniaco" del tema más…

(Animador: o divino?) ... Si pero por el lado malo, porque para eso existe lo que se denomina las "serendipias[1]*"*
S3F1_L200: mitos (eventos) milagrosos a grandes rasgos.

3. Efecto del contexto de las situaciones y fenómenos en la forma de pensar de los profesores

Claramente el contexto de **juego** es donde los profesores se sienten más cómodos en lo que respecta a los conceptos de aleatoriedad y probabilidades. De hecho este contexto no les permite dudar si las situaciones son o no aleatorias, para ellos definitivamente son aleatorias. El usar objetos tales como dados, monedas o fichas, permite trabajar de manera más directa con los fenómenos o experimento aleatorios.

Para los contextos que se definieron como **reales y cotidianos**, la situación cambia. En algunos casos entra a jugar un papel importante el aspecto determinista de los fenómenos. No es tan directo percibir un fenómeno como aleatorio, por lo que se producen discrepancias. Es decir, una situación para algunos docentes puede ser perfectamente aleatoria, mientras que para otros puede ser sencillamente determinista. Por ejemplo, es el caso de la "germinación de una semilla". Acorde con autores como Azcárate (1996) y Cardeñoso (2001) la formación exclusiva de los docentes bajo un enfoque determinista, hace que ellos asocien factores causales o condiciones que favorezcan o no a los fenómenos. Por otra parte el desconocimiento de cualquier factor causal, hace que el fenómeno se comporte como aleatorio.

El concepto de probabilidad en los contextos de juego, es más definido para los docentes, tanto desde una perspectiva **laplaciana** como **frecuencial**. No obstante, en el caso de los contextos reales y cotidianos el concepto de probabilidad es diferente, pues la perspectiva laplaciana no necesariamente tiene un sentido claro aquí y es la perspectiva frecuencialista la que puede entregar mayor información, por ejemplo, a

[1] Una **serendipia** es un descubrimiento o un hallazgo afortunado e inesperado. Se puede denominar así también a la casualidad, coincidencia o accidente http://es.wikipedia.org/wiki/Serendipia. Otra definición es: "la capacidad de hacer descubrimientos por accidente y sagacidad, cuando se está buscando otra cosa. http://serendipia.zoomblog.com/archivo/2008/01/10/otra-Definicion-de-Serendipia.html

través de porcentajes. Sin embargo, es posible evidenciar elementos **subjetivos** y también algunos **sesgos y heurísticas**.

Respecto de las concepciones que reconocen la aleatoriedad, se pueden distinguir aquellas que solo involucran contextos reales y cotidianos, solo contextos de juego, o bien ambos contextos.

Cuadro 5.4: Contextos de juego versus contextos reales y cotidianos.

Solo en contextos reales y cotidianos	En ambos contextos	Solo en contextos de juego
Factores causales (C3)	Equiprobabilidad (C4)	Múltiples opciones (C6)
Aspectos subjetivos (C7)	Incertidumbre (C5 y C9)	Resultados posibles (C8)
Mágico Suerte (C10)	Probabilidad frecuencial (C12 y C13)	Probabilidad laplaciana (C11)
Variación de la probabilidad (C14)		

Cabe destacar que de las catorce concepciones encontradas, solo en dos de ellas (concepciones 1 y 2) se produce una explícita negación del azar. En ambas se encuentran involucrados contextos reales y cotidianos. La negación no se da en contextos de juego. En este caso al utilizar aleatorizadores concretos como dados o monedas, la percepción del azar pareciera ser más directa. En el caso de fenómenos reales y cotidianos, el sesgo determinista de algunos sujetos hace concluir que siempre habrá factores causales involucrados y que el azar podría ser despreciable. A diferencia de Azcárate (1995), en el caso de hechos ya ocurridos, no hay un mayor cuestionamiento de que la situación es no aleatoria, a pesar de no manejar información.

4. Profesores de enseñanza media versus profesores básicos

Los profesores básicos, con mucho menos conocimiento sobre las probabilidades, aunque por cierto no nulo, a partir de sus cursos de formación inicial y continua, se caracterizan por buscar estrategias alternativas y más "visuales" para resolver ciertos problemas. Su razonamiento es más intuitivo en la mayoría de los casos. En cambio, los docentes de enseñanza media tienden a buscar el conocimiento más formal (fórmulas) para argumentar sus respuestas.

Cabe mencionar que en cuanto a las estrategias de razonamiento, en ambos grupos es posible observar algunas heurísticas (disponibilidad, representatividad, por ejemplo) al momento de resolver problemas de combinatoria y probabilidad. Por otro lado, es posible chequear que ambos grupos de profesores usan el razonamiento proporcional y razonamientos que involucran la independencia de sucesos.

Cuadro 5.5: Profesores básicos versus profesores medios, según tipos de razonamiento.

Solo profesores básicos	Profesores de ambos niveles	Solo profesores medios
Razonamiento combinatorio intuitivo	Razonamiento proporcional	Razonamiento combinatorio formal
Razonamiento condicional intuitivo	Razonamientos que involucran la independencia de sucesos	Razonamiento condicional formal o completo
	Heurísticas	

5. Dificultades en la comprensión de los conceptos de azar, aleatoriedad y probabilidad

Tal como se ha revelado en las entrevistas con algunos de los docentes, conceptos tales como aleatoriedad o probabilidad, efectivamente traen sus dificultades. Cosa que ya afirman autores tales como Batanero (2006) y los ya mencionados Azcárate (1995) y Cardeñoso (2001). A partir del análisis de los datos es posible encontrar, de parte de los docentes, consideraciones respecto de las probabilidades como un área de enseñanza en la que las situaciones o problemáticas, a diferencia de otras áreas, admiten más de una interpretación dependiendo de la lectura que se le haga. Es lo que genera un sentimiento de inseguridad en los docentes, al momento de responder a un problema. Algunos testimonios:

> *S2F2_L1032: Por qué siempre pasa que en este tipo de… de ejercicios queda con la sensación de… (S7: uno duda…) queda con la sensación en el aire como que (S9: de que no era eso) que no era eso.*
>
> *S2F2_L1034: No pasa con los problemas de… (S7: de álgebra, de geometría, de nada…)*

> *S1F3_L 607: El punto es que cualquiera explica algo y es… Pero en probabilidades todo el mundo lo duda dependiendo de cómo lo escriba…*

Conceptualmente al momento de definir términos como **azar, aleatoriedad** y **probabilidad**, también existen dificultades y los docentes de alguna manera se aproximan, pero reconocen la falta de claridad en algunos casos. Esto se puede apreciar en los siguientes ejemplos:

> *S9E1_L174: Aleatorio es… siempre se me confunde el término… pero creo que es un hecho que no depende de… a ver que es como… incierto. Qué es incierto, que no sabemos si puede o no puede ocurrir, está relacionado con la palabra Azar.*
>
> *S7E1_L366: Por eso te digo… o sea el azar es algo que no está establecido, está más relacionado con… si de una manera con lo que esté. Un desorden, o sea con lo que haya… me entendís… uno nunca sabe absolutamente nada. Pero a mí se… de aleatorio se me imagina, dentro de (un orden).*
>
> *S3E1_L352: El término de… qué significa el término de probabilidad… eh… que es probable… que se puede probar… que hay… a ver cómo los podríamos decir… que hay situaciones que prueban que va a suceder, algo así.*
>
> *S9E1_L265: La probabilidad es como el porcentaje que indica que un hecho suceda… y naturalmente que no suceda y probable no, si va a suceder o no va a suceder en qué porcentaje.*

6. Preparación de los docentes y algunas hipótesis respecto a dificultades en la enseñanza de las probabilidades

En general, los docentes consideran que necesitan una mayor preparación en el eje de Datos y Azar. A pesar de que tienen formación inicial en estadística y probabilidades, además de algunos cursos de actualización docente, necesitan apoyo en lo conceptual y también en lo didáctico. Esto por las demandas curriculares actuales en nuestro país. Algunos testimonios de los docentes a continuación:

> *S9E1_L108: Más preparada que antes, pero no tan preparada…cada vez que yo veo una unidad, la estudio primero.*
>
> *S3E2_L38: A ver, dentro de lo que es la formación eh… yo me siento medianamente preparado. Yo creo que todavía me falta harto por aprender, eh… he sabido algunas cosas, he ido aprendiendo otras cosas, en la medida que uno se va perfeccionado. Yo veo que falta harto todavía…*

S2E3_L131: yo creo que tengo que estudiar, o sea no niego que eso es algo que tengo que hacer eh… hay muchos temas de probabilidades que sí estudié en algún momento, los conozco como estudiante eh… ahora si tuviera que enseñar esta curva normal, que de hecho no es algo tan fácil, ya la fórmula deja de ser algo trivial digamos para un alumno, pero eso es también parte de nuestro progreso.

Se pueden inferir algunas hipótesis respecto a las **dificultades** que podrían tener los docentes al momento de enseñar probabilidades, considerando los resultados de la presente investigación:

6.1. Dificultad en la definición de conceptos claves tales como azar, aleatoriedad y probabilidad. Tal como ya se mencionó, a los docentes les cuesta definir los conceptos fundamentales. Si se va a enseñar probabilidades es crucial tener claridad, por ejemplo, en los diferentes significados de "probabilidad", tal como los describe Batanero (2006). En el caso de la aleatoriedad, no existe una única forma, precisa y válida universalmente para definirla (Cardeñoso, 2001). Sólo puede ser definida en función de los instrumentos disponibles (Kyburg, 1974; citado en Azcárate, 2006).

6.2. Existencia de concepciones que favorecen o dificultan un tratamiento más idóneo de las probabilidades. Por ejemplo, concepciones que relacionan la aleatoriedad con la incertidumbre, la multiplicidad de opciones o la equiprobabilidad apuntarían a una mejor comprensión de los fenómenos aleatorios y la probabilidad. Sin embargo, la relación entre aleatoriedad y factores causales, dificultaría una compresión hacia un modelo más normativo, al momento de analizar las causas subyacentes de un fenómeno (Azcárate, 1995; 2006; Cardeñoso, 2001). Esto se relaciona más con presupuestos deterministas.

6.3. Tratamiento de la probabilidad exclusivamente desde la regla o modelo de Laplace. Tal como ha sido mencionado antes, la regla de Laplace está lo suficientemente instalada en el conocimiento de los docentes. Es necesario considerar una amplitud de situaciones en los que haya un tratamiento frecuencial y además incorporar la componente subjetividad. Incluso en las primeras aproximaciones hacia la probabilidad, considerar estrategias no convencionales como la "contingencia" descrita por Pierce (citado en Cardeñoso, 2001). Tal como señala Romagnoli (2011) considerar el concepto intuitivo de base de la noción de probabilidad como el cociente entre casos favorables y casos posibles, a la larga produce confusiones en la compresión misma del concepto.

6.4. <u>Tratamiento de las probabilidades principalmente desde lo teórico</u>. En los procesos de enseñanza respecto del Azar y las Probabilidades se debe reflejar la interacción entre modelo matemático y situación experimental, en los diferentes niveles de complejidad. Esta forma de instrucción implica una aproximación a lo estocástico desde lo empírico, lo intuitivo y lo formal (Falk y Konold, 1991, citados en Azárate, 1996).

6.5. <u>Tratamiento de las probabilidades mayoritariamente en contextos lúdicos, no así en contextos reales y cotidianos</u>. Los profesores acorde a su experiencia, se sienten cómodos al trabajar las probabilidades en contextos lúdicos, incluso, no dudan respecto de la aleatoriedad de los eventos cuando se trata de juegos con dados, por ejemplo. Sin embargo, en los contextos reales y cotidianos la situación cambia y la aleatoriedad no es tan clara en algunos fenómenos. Por otra parte, definir un cierto espacio muestral puede resultar complejo Por lo mismo, debe potenciarse el trabajo en contextos reales, considerando que el azar está presente en nuestras vidas.

6.6. <u>Dificultades del razonamiento combinatorio</u>. Tal como se ha mostrado en el análisis de este estudio, cuando se proponen algunos problemas que involucran combinatoria, los profesores encuentran algunas dificultades dependiendo del nivel de conocimiento que tengan. Es así como, se pudo apreciar que en algunos casos incluso aparecen ejemplos de la heurística de disponibilidad, donde se observan razonamientos principalmente aditivos.

6.7. No tratar adecuadamente las heurísticas en el razonamiento probabilístico. Tal como se ha mostrado en el análisis de este estudio, al proponer algunos tipos de problemas que involucran probabilidades, aparecen algunas heurísticas tales como las de representatividad o disponibilidad. Como señala Azcárate (2006), el razonamiento de las personas - niños y adultos - en situaciones de incerteza, es frágil, sin alcanzar niveles formales en la conceptualización. Es decir, existen sesgos en los razonamientos, ya que se detectan concepciones intuitivas y la utilización de esquemas heurísticos en sus actividades.

7. Concepciones y desarrollo profesional docente en el área de Estadística y Probabilidades

Respecto a las concepciones de los docentes y los cursos de **desarrollo profesional**, se puede establecer lo siguiente:

7.1. Es importante considerar las concepciones de los docentes al momento de diseñar cursos de capacitación o profesionalización docente. Esto ya ha sido enfatizado por autores tales como Azcárate, Cardeñoso y Porlán (1998) y Azcárate (2006). En particular para el caso de probabilidades, tal como este estudio ha revelado, existen concepciones que favorecen un pensamiento probabilístico más idóneo, mientras que otras lo dificultan. Por otra parte, como ya se ha mencionado, los conceptos de azar, aleatoriedad y probabilidad producen dificultades en su compresión.

7.2. Datos y Azar es un área nueva en el currículo de nuestro país. Acorde a las exigencias curriculares ya mencionadas, los profesores recién están tomando el peso de lo que significa enseñar Estadística y Probabilidades desde los niveles básicos. Por lo mismo, los docentes se perciben con mediana o poca preparación para enfrentar el desafío. Se requieren cursos de capacitación que apunten tanto a lo conceptual como a lo didáctico y que, por cierto, consideren sus concepciones previas.

7.3. Las dificultades propias que tiene el área de la Estadística y las Probabilidades. El área de la Estadística y las Probabilidades es reconocida como un área problemática a la hora de ser enseñados a nivel escolar (Araya, 2001). En el caso de las probabilidades, la complejidad de los conceptos fundamentales o las diferentes interpretaciones de la probabilidad favorecen la existencia de sesgos y razonamientos heurísticos (Azcárate, 2006; Batanero, 2006). Además, el pensamiento estocástico, a diferencia de otras áreas de la matemática como la aritmética, geometría o álgebra, siempre está vinculado a situaciones reales (Azcárate, 2006). Por esto siempre será imprescindible establecer una clara diferencia entre la situación real y el modelo matemático, desde el comienzo.

7.4. Docentes de enseñanza básica versus docentes de enseñanza media. Acorde a los resultados de esta investigación, en la cual participaron tanto docentes de enseñanza básica como docentes de enseñanza media, es claro que los docentes de media tienen una mayor formación en el área de probabilidad y estadística. Por otra parte, los docentes de básica de todas formas tienen nociones de probabilidad, a raíz de su formación académica, o bien por los cursos de perfeccionamiento que han tenido. No obstante, en ambos grupos de profesores se pueden apreciar falencias conceptuales, además, de la presencia de razonamientos heurísticos. En cursos de desarrollo profesional, debe considerarse un refuerzo conceptual y didáctico, especialmente para profesores básicos.

8. Proyecciones para esta línea de investigación

A partir del estudio realizado, es posible pensar en proyecciones para esta línea de investigación. Esto por una parte, como ya se ha mencionado, es una línea poco desarrollada en nuestro país. Por otra parte, debe considerarse el impacto que en los docentes está causando la incorporación obligatoria de temas relacionados con Datos y Azar, tanto en básica como en media. Finalmente, se puede decir que para el siglo XXI, el deficitario desarrollo del pensamiento científico y matemático de los estudiantes significa un retraso en la formación de los ciudadanos chilenos acorde a la modernidad. Por lo mismo, es de interés desarrollar las siguientes líneas de investigación:

8.1. Concepciones de los docentes y futuros docentes de matemática en torno al azar y las probabilidades. Respecto al enfoque de esta línea de investigación, se sugiere realizar estudios mixtos. Por una parte se propone potenciar lo cualitativo a través de las categorías utilizadas, pero por otro es deseable incorporar lo cuantitativo, ampliando el estudio a un número mayor de docentes. De esta manera la idea es que se puedan verificar tendencias de pensamiento probabilístico y reafirmar los hallazgos cualitativos.

8.2. Concepciones de los docentes y futuros docentes de matemática en torno a la enseñanza y el aprendizaje del azar y las probabilidades. Es crucial ampliar el estudio a las concepciones de los docentes respecto de la enseñanza y el aprendizaje de las probabilidades, es decir, al aspecto didáctico de estos contenidos. En particular, ahora que deben realizar clases de probabilidades desde básica. Cabe mencionar que, respecto a la enseñanza y aprendizaje de las probabilidades, a partir de las entrevistas y grupos focales, se han revelado algunas hipótesis, las cuales se describen más adelante.

8.3. Razonamiento probabilístico, sesgos y heurísticas. Vale la pena ampliar la investigación hacia una línea más tradicional, la que tiene que ver con el razonamiento probabilístico, sesgos y heurísticas: Fischbein (1975), Kahneman, Slovic y Tversky (1982), Shaughnessy (1992), Serrano, Batanero y Ortiz (1996), Barragués et al., (2005), Salcedo y Mosquera (2008), entre otros. La presente investigación solo tocó tangencialmente el tema, pero es importante establecer un mapa más detallado respecto de cómo razonan los docentes en nuestro país, frente a situaciones que involucran azar y probabilidades.

8.4. Didáctica de las probabilidades. Finalmente se puede considerar una línea de investigación propiamente en lo que respecta a la didáctica de las probabilidades y el azar. Es decir, dirigir los esfuerzos al desarrollo de un pensamiento no-determinista en paralelo al determinista, involucrando los procesos de enseñanza y aprendizaje. Se puede comenzar revisando los trabajos de Godino, Batanero y Cañizares (1991), Azcárate (2006), así como también propuestas nacionales de Araya (2000), Soto (2000), Saavedra (2005) y Romagnoli (2011).

9. Algunas hipótesis respecto a cómo conciben los docentes la enseñanza y aprendizaje de las probabilidades

Si bien no formó parte de los análisis de esta investigación, a través de los grupos focales y las entrevistas en profundidad fue posible encontrar algunos elementos (concepciones) acerca de la enseñanza y aprendizaje de las probabilidades. Vale la pena rescatar algunas categorías que los mismos docentes revelaron:

9.1. <u>Los profesores reconocen que los estudiantes pueden comenzar tempranamente el estudio de las probabilidades, desde la básica</u>. Los estudiantes tienen las capacidades para comenzar desde temprana edad con el estudio de las Probabilidades, en conjunto con la Estadística. Algunos testimonios de los docentes a continuación:

> *S9E1_L4: ... Yo creo… mira tengo un niño en 2° básico y ya analiza gráficos …entonces esto de jugar a los números, de jugar a los dados, de jugar con las monedas yo creo que es algo que ellos hacen ¿ya? A veces, por ejemplo, hasta juegan a adivinar el color del auto que va a venir y empiezan a registrar… Yo creo que ellos cada vez están más capacitados para hacer más cosas. Uno puede exigirles.*
>
> *S3E2_L2: A ver yo antes de comenzar el curso, yo igual tenía más menos la idea de que a un niño desde 1° básico perfectamente le pueden enseñar lo que sea. Ellos, si lo adaptamos a la forma como método de trabajo a la forma en la cual el niño piensa, yo creo que sí fácilmente se le puede enseñar todo lo que es probabilidades.*
>
> *S2E3_L11: De quinto básico yo creo que se puede aprender. Tengo a mi hija en 5°, estudio con ella, veo sus capacidades. Veo que ella piensa, razona y puede procesar ideas. Entonces si ella puede, se puede hacer extensible a los demás niños.*

9.2. <u>Los profesores perciben el eje de Datos y Azar como un eje relevante dentro del currículo.</u> El eje de Estadística y Probabilidades (Datos y Azar) es relevante en relación con otros ejes del sector de matemática. Algunos testimonios de los docentes a continuación:

> *S3E2_L21: A ver… si son o no de igual relevancia, yo creo que todos tienen la misma relevancia. Yo creo que en matemática es súper difícil encontrar tópicos que no estén relacionados unos con otros. O sea ir parcelando la matemática yo creo que es un error, error que de repente los profes cometemos… En este tópico en especial hay una parte que me llama mucho la atención…, que es que de una u otra manera el niño tiene que generar análisis de ciertas situaciones…, o sea el perfectamente manejándose con el tema de probabilidades puede establecer… puede llegar a tomar decisiones a futuro… ¿ya?...*

> *S2E3_L94: Es un eje relevante. Que no es menor ni mayor que la geometría, por ejemplo. Yo creo que en este mundo que estamos ya orientados… es necesario saberlo.*

> *S3E2_L26: … me parece sumamente válido y mientras más chiquitos empiecen a hacerlo mejor, o sea que el niño se capaz de tomar una idea, tomar una… un sucesivo de situaciones y en base a ese sucesivo de situaciones decir ya… va a suceder tal o cual cosa, por el análisis que hizo, me parece súper válido que lo manejemos desde chiquitito hasta más grande.*

9.3. <u>Los profesores perciben el eje de Datos y Azar como un eje cercano a los estudiantes, aludiendo a la conexión con la realidad</u>. Los contenidos de Datos y Azar son más cercanos a los estudiantes en comparación a los otros ejes. Por ejemplo:

> *S7E4_L49: Creo que de todos los ejes este es el más cercano. Justamente porque estamos en un mundo relacionado mucho que esta cosa del azar, de los juegos, eh… están pensando siempre si algo va a suceder o no. Tiene que ver un poco con la vida, entonces yo creo que… de todos los ejes sigue siendo uno de los más atractivos…*

9.4. <u>Los profesores identifican algunas dificultades que pueden tener los estudiantes para aprender probabilidades.</u> Dentro de las dificultades que detectan los profesores para el aprendizaje de las probabilidades, se encuentran los conocimientos previos, las “fantasías propias de la edad”, el lenguaje matemático. Algunos testimonios de los docentes a continuación:

> *S9E1_L10: Si para eso yo creo que los niños necesitan conocimientos previos. Por ejemplo, manejarse con porcentajes con fracciones con números decimales. Entonces yo creo que a partir de 5°, 6° ya estarían capacitados para aplicar sus conocimientos… para que no fuera tan intuitiva la probabilidad.*

> *S3E2_L7: … quizá de repente porque los niños son medios fantasiosos y de una u otra manera los niños puede que al nivel de los primeros y segundos básicos, sientan probable algo o posible algo que es imposible, pero no creo que tengan dificultades grandes más allá de expresar en forma correcta la situación…*

S2E3_L22: Yo pienso que la dificultad pasa por la escritura matemática, ellos tienen un… yo lo llamo "el fantasma de las matemáticas", porque tu le hablas de ya… vamos a ocupar una fórmula, por decirlo así, ellos te colocan al tiro la barrera ahí, entonces esa barrera que viene de generaciones…

9.5 Los profesores identifican algunas situaciones más idóneas y/o estrategias para abordar la enseñanza de las probabilidades. Como situaciones más idóneas para la enseñanza de las probabilidades están contemplados la experimentación, el juego y el uso de material concreto. Algunos testimonios de los docentes a continuación:

S9E1_L34: Yo partiría con que ellos experimentaran. Yo partiría con experimentación, que ellos hagan que jueguen, que saquen monedas, que… en el fondo que jueguen pero naturalmente tiene que registrar lo que hacen.

S3E2_L13: yo creo que todo lo que es trabajar con …con monedas, con bolitas … con eh… incluso de repente con situaciones de la vida real como si va a llover o no va llover al otro día … eh… aprovechando la época del mundial quién va a ganar… que probabilidad hay, entonces yo creo que la situaciones primero cotidianas no van a ayudar un montón y después las otras situaciones de juego eh… que se yo … las apuestas, cuánto voy a sacar en este dado, las ruletas que ellos juegan de repente o las mismas cartas que ellos juegan de repente eh… son como lo más apropiado…

S3E2_L15: concreto por sobre todas las cosas y que ellos puedan hacer, ver y obviamente e inmediatamente obtener el resultado, porque a ellos no les sirve mucho a los niños a los niños no les sirve mucho la espera… ellos son como de eh… problemas – soluciones. No sirve de otra forma…

9.6. Los profesores identifican algunas metodologías o enfoques para abordar la enseñanza de las probabilidades. La enseñanza de las probabilidades debe comenzar desde lo experimental, usando las frecuencias relativas, para luego trabajar lo más teórico, por ejemplo, la regla de Laplace. Algunos testimonios de los docentes a continuación:

S1F1_L76: uno no impone cosas, parte con frecuencia estadística…. (ítem 1.4.-).

S7F2_L325: Uno parte haciendo las frecuencias relativas… porque es lo más cercano a través de la experimentación…

S7F2_L326: Y después hace el conector con la probabilidad… en el fondo basándose un poco en la regla de Laplace… que habla de los casos favorables y casos totales. Entonces…

En el tratamiento de las probabilidades se debe incorporar el uso de esquemas tales como los diagramas de árbol para facilitar el aprendizaje de los estudiantes. Algunos testimonios de los docentes a continuación:

S1F2_L542: Por ellos pueden hacer el diagrama del árbol.

S1F2_L549: Es amigable para los alumnos.

S1F2_L554: Porque por último el niño que no es rápido mentalmente, lo mira cachai, puede llegar sumar pa'l lado o lo que le pidan hacer pos.

S4F2_L555: Es más fácil para los alumnos…

9.7. <u>Los profesores pueden diferenciar algunas metodologías para abordar la enseñanza de las probabilidades, si se trata de estudiantes básicos o estudiantes de media.</u> Como elemento diferenciador de nivel para la enseñanza de las probabilidades, se propone preferentemente lo más visual y lo concreto para básica. Algunos testimonios de los docentes a continuación:

S7E4_L38: Es que yo creo que la… en el caso de básica, pensando ponte tú desde 2° básico, tendría que ser algo más "palpable", o sea tendría que ser con… con materiales que ellos pudieran manipular. Con fichas, con dados, eh… Yo creo que en media, por ejemplo, uno puede inclusive, si ellos ya tuvieron estas experiencias en los cursos menores, trabajar con… obviamente con algún programa tecnológico, que eso fuera… visualmente atractivo.

S2E3_L47: Usar mucho lo concreto, en básica. Hacer experimentos, juegos.

Para el caso de enseñanza media se propone un mayor análisis y abstracción, así como también juegos de probabilidades condicionales. Algunos testimonios de los docentes a continuación:

S7E4_L 42: Siento que en media, en realidad uno debería trabajar mucho más con… la abstracción y todo.

S2E3_L47: … No me pasa lo mismo en media. Las veces que me ha tocado hacer esto, porque los niños de media eh… conocen resultados ya previos, ¿entiendes? Hablamos del dado y ya conocen resultados previos. Lo han escuchado y por último, no funciona mucho el juego. A menos que fuera un juego, novedoso para ellos no? Motivador y con un grado de dificultad que no fuera inmediato. ¿Me entiende?

S2E3_L48: Quizá ahí sería apropiado buscar juegos de probabilidades condicionales, ¿me entiende? O… esa probabilidad así inmediata, una moneda por ejemplo, todos me van a dar una respuesta rápidamente… aún así ni siquiera los más aventajados en el tema…

10. Comentarios finales

Como reflexión final se puede decir que el eje de Datos y Azar es internacionalmente reconocido como un área curricular, cuya compresión no está exenta de dificultades. En particular las Probabilidades por su naturaleza, no constituyen un área “cómoda” para los docentes, quienes han sido formados mayoritariamente bajo un paradigma principalmente determinista (Fischbein, 1990, citado en Cardeñoso, 2001).

Tal como han señalado los mismos docentes que participaron en la investigación, se hace necesaria una mayor preparación en los temas de Probabilidad y Estadística, en lo conceptual y didáctico, dada la complejidad intrínseca de los contenidos. Y esto es un tema urgente, debido a las ya mencionadas demandas curriculares. En especial, los docentes de básica requieren de una importante ayuda, dado a que su conocimiento matemático no es del nivel de los profesores de enseñanza media, no obstante, deben ahora enseñar estos tópicos a estudiantes básicos.

En conexión con lo anterior, las concepciones de los docentes y futuros docentes de matemática, en particular acerca del azar y las probabilidades, y su enseñanza, constituyen un terreno fértil para la investigación en nuestro país. Vale la pena dirigir los esfuerzos a esta área, acorde a las nuevas exigencias curriculares ya mencionadas.

A través de los resultados de la presente investigación ha sido posible develar – con un grupo pequeño de profesores - un conjunto de concepciones y criterios de razonamiento, en torno al azar y las probabilidades, lo cual ha permitido establecer un mapa inicial de las representaciones, imágenes y significados de los docentes en torno a estos contenidos. A través de dicho mapa se podrían establecer algunos caminos para diseñar estrategias de trabajo con docentes al momento de una capacitación profesional.

Queda aún por investigar las concepciones en docentes acerca del azar y las probabilidades de una manera más cuantitativa y que permitan mejorar los instrumentos para buscar tendencias en el pensamiento probabilístico de los profesores. Del mismo modo – y de sumo interés - queda por profundizar en aspecto de la enseñanza y aprendizaje de las probabilidades, especialmente ahora que los profesores comienzan a realizar clases acerca de estos temas en los niveles básicos. Algunas preguntas claves serían: ¿Cómo enseñan probabilidades los docentes? ¿Cómo aprenden los estudiantes las probabilidades? ¿Cuáles son las principales dificultades?

En consideración a lo anterior, es necesario elaborar cursos de desarrollo profesional, tal como lo han señalado antes Azcárate, Cardeñoso y Porlán (1998), de modo que permitan la evolución de dichas concepciones hacia un pensamiento probabilístico más normativo. Lo importante es que los mismos docentes tomen conciencia de sus concepciones acerca de los contenidos involucrados, de modo que puedan ir mejorando su comprensión tanto conceptual como didácticamente. Cabe recordar que el rol de las concepciones iniciales de los sujetos es de suma importancia para lograr la comprensión de la probabilidad y su significado (Konold, 1991, citado en Azcárate et al., 1998).

La presente investigación, bajo una mirada cualitativa y con un grupo de docentes, ha puesto en la discusión el tema de las concepciones de los docentes acerca del azar y las probabilidades. Sin lugar a dudas, por los estudios previos y antecedentes, este tema tiene una mayor profundidad, extensión y - una particular fascinación acorde a los hallazgos de los estudiosos del tema - por lo que significa acercarse a las representaciones, significados, imágenes, creencias respecto a un área joven de la matemática. Hay que recordar que sólo a mediados del siglo XVII aparece la noción de probabilidad y, sólo hace unos pocos años, vocablos y conceptos de las probabilidades se han incorporado al lenguaje corriente (Gigerenzer, 1998; citado en Araya, 2000).

Por último, es de gran interés explorar el razonamiento probabilístico en los docentes, al considerar sus intuiciones primarias, los razonamientos heurísticos, hasta la aplicación de un conocimiento más normativo. El propósito de esto es, sin duda, claro e importante: lograr que los estudiantes aprendan a razonar probabilísticamente. Y tal como dice Romagnoli (2011) enseñar probabilidades no puede limitarse a estructuras conceptuales y herramientas para la resolución de problemas. Es necesario desarrollar el razonamiento probabilístico y fortalecer la intuición.

Pero para ello es necesario que los futuros docentes y los docentes en ejercicio tengan una sólida formación en Estadística y Probabilidad, desde los cursos de pre grado hasta los cursos de profesionalización o actualización en el área de formación continua. De lo contario se hace complejo el desafío, ya que desde luego como una importante conclusión final de este estudio es que las concepciones de los docentes afectan las concepciones de los estudiantes, por lo mismo, su aprendizaje.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andreú Abela, J. (2001). Las técnicas de Análisis de Contenido: Una revisión actualizada. Documento de trabajo CENTRA 2001/03. Recuperado el 10 de noviembre de 2011, de http://public.centrodeestudiosandaluces.es/pdfs/S200103.pdf

Araya, R. (2000). *Inteligencia Matemática*. Santiago, Chile: Editorial Universitaria.

Araya, R. (2001). Probabilidades de Segundo Medio. En *Propuesta didáctica para el Proyecto FONDEF D00I1073: "Aprender Matemática Creando Soluciones". Desarrollo de un Modelo Interactivo para el aprendizaje de la matemática en Enseñanza Media*. Documento sin publicar, Centro Comenius, Universidad de Santiago de Chile.

Araya, R. (s.f.). *Una visión ecológica del razonamiento humano: entrevista a Gerd Gigerenzer*. Recuperado el 23 de agosto de 2010 desde el sitio web del Programa de Investigación en Educación de la Universidad de Chile: http://www.automind.cl/educacion/publicaciones/publicaciones.htm

Atorresi, H, García, A. y Pralong, H. (2008). Sesgos en la estimación de probabilidades para dos situaciones secuenciales aleatorias. *SUMA Psicológica UST*, *5*(1), 3-12.

Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la educación primaria*. Tesis doctoral inédita. Universidad de Cádiz.

Azcárate, P. (1996). *Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaría en torno a las nociones de la aleatoriedad y probabilidad*. Granada - España: Comares.

Azcárate, P., Cardeñoso, J.M. y Porlán, R. (1998). Concepciones de futuros profesores de primaría sobre la noción de aleatoriedad. *Enseñanza de las Ciencias*, *16*(1), 85-97.

Azcárate, P. y Cardeñoso, J.M. (1997). La enseñanza/aprendizaje del conocimiento probabilístico. En: Beltran y otros (Ed.): *Nuevas perspectivas en la intervención psicopedagógica.* Madrid: Serv. Publi. Univ. Complutense.

Azcárate, P. (2006). ¿Por qué no nos gusta enseñar estadística y probabilidad? En: Flores, P., Roa, R. y Pozuelo, R. (Eds.). *Actas de XII Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas, Granada* (pp.45-72). Editado por Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y la Sociedad

Andaluza de Educación Matemática (SAEM) "Thales". Recuperado el 15 de agosto de 2010, de http://www.earlystatistics.net/

Barragués, J., Guisasola, J. y Morais, A. (2005). Concepciones de los estudiantes de primer ciclo de universidad sobre estimación de la probabilidad. *Educación Matemática*, 17(1), 55 – 85.

Batanero, C. (2001). *Aleatoriedad, modelización, simulación*. Presentado en la X Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas, Zaragoza. Recuperado el 12 de octubre de 2009, de http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/Jaem2001.pdf

Batanero, C., Godino, J. y Roa, R. (2004). Training Teachers To Teach Probability. *Journal of Statistic Education*, *12* (1). Recuperado el 6 de junio de 2010, de http://www.amstat.org/publications/jse/v12n1/batanero.html

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la enseñanza secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *8*(3), 247 – 263.

Batanero, C., Godino. J. D. & Cañizares, M. J. (2005). Simulation as a tool to train pre-service school teachers. *Proceedings of First ICMI African Regional Conference*. Johannesburg: ICMI.

Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo. En: P. Flores y J. Lupiañez (Eds.): *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar*. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales.

Behar, R. (2004) Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística: Mitos Y Barreras. Heurística, *11*, 59 – 66. Recuperado el 12 de diciembre de 2008, de http://eiie.univalle.edu.co/heuristica11.html

Borovcnick, M. (2005). *Probabilistic and statistical thinking*. Proceedings of the Fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education. Sant Feliu de Guíxols, Spain: ERME. Recuperado el 15 de abril de 2008, de http://ermeweb.free.fr/CERME4/CERME4_WG5.pdf

Canales, M. (2006). *Metodologías de la investigación social. Introducción a los oficios*. Santiago, Chile: Editorial LOM.

Cardeñoso, J.M. (2001). *Las creencias y conocimientos de los profesores andaluces sobre la matemática escolar. Modelización de Concepciones sobre la aleatoriedad y probabilidad*. Tesis doctoral. Cádiz: Universidad de Cádiz.

Centro Comenius. (2008). *Datos y Azar.cl. Creando modelos para representar y entender el azar. Curso interactivo en Estadística y Probabilidades para profesores del segundo ciclo de Educación Básica. (Propuesta Técnica)*. Documento sin publicar, Centro Comenius, Universidad de Santiago de Chile.

Chaves, E., Castillo, M. y Gamboa, R. (2008). Creencias de los estudiantes en los procesos de aprendizaje de las Matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 4,* 29 - 44.

Corral, Y. (2009). Validez y confiabilidad de los instrumentos de investigación para la recolección de datos. *Revista ciencias de la educación, 19(*33*)*, 228 – 247.

De Faria Campos, E. (2008). Creencias y Matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *4,* 9 -27.

Dodera, M., Burroni, E., Lázaro, M. y Piacentini, B. (2008). Concepciones y Creencias de Profesores sobre Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática. *Premisa*, *39*, 5-16. Recuperado el 13 de Noviembre de 2009, de http://www.soarem.org.ar/Documentos/39%20Dodera.pdf

Eichler, A. (2006). Individual curricula: Beliefs behind teachers' beliefs. In A. Rossman & B. Chance (Eds.). Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics. Salvador, Brazil: IASE, ISI. Recuperado el 12 de diciembre de 2008, de www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications

Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J. M. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las Ciencias,* 22 (2), 263-274.

Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona. Recuperado el 12 de diciembre de 2008, de http://www.ugr.es/~batanero/publicaciones%20index.htm

Espassandin Lopes, C.A. (2004). El conocimiento profesional de los profesores y sus relaciones con la estadística y la probabilidad. En: E. Castro y E. De la Torre (Eds.): *Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. La Coruña. Recuperado el 10 de diciembre de 2008, de http://www.doredin.mec.es/documentos/01120112000091.pdf

Fischbein, E. (1975). The intuitive sources of probabilistic thinking in children. Dordrecht: Reidel

Flick, U. (2004). *Introducción a la investigación cualitativa*. Madrid – España: Ediciones Morata.

Flores, P. (1998). *Creencias y concepciones de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Evolución durante las prácticas de enseñanza.* Granada - España: Comares.

Flores, P., Godino, J. D. & Batanero, C. (1998). El análisis didáctico del contenido matemático como recurso en la formación de profesores de Matemáticas [Contextualising didactical knowledge on stochastics in mathematics teacher's training]. In: A. Olivier & K. Newstead (Eds.). *Proceedings of the 22 nd International group for the Psychology of Mathematics Education*. Stellenbosch. 4: 332. Recuperado el 12 de diciembre de 2008, de http://www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/viewArticle/396

García, L., Azcárate, C. y Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (*RELIME*). 9 (1), 85-116.

Gigerenzer, G. (2002). *Reckoning with risk*. *Learning to live with uncertainty*. Londres: Penguin Books.

Gigerenzer, G., & Edwards, A. (2003). Simple tools for understanding risks: From innumeracy to insight. *BMJ, 327*, 741-744.

Gigerenzer, G. (2005). I think, therefore I err. *Social Research, 72* (1), 1-24.

Gigerenzer, G., Hertwig, R., Van den Broek, E., Fasolo, B., & Katsikopoulos, K. (2005). "A 30% Chance of Rain Tomorrow": How Does the Public Understand Probabilistic Weather Forecasts? *Risk Analysis*, *25* (3), 623 – 629.

Gigerenzer, G., & Walter, K. (2005). How to Confuse with Statistics or: The Use and Misuse of Conditional Probabilities. *Statistical Science. Institute of Mathematical Statistics*, 20(3), 223 – 230.

Godino, J., Batanero, C., Cañizares, M. J. (1991). *Azar y Probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid – España: Síntesis.

Hernández Sampieri, R., Fernández, C., Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación.* México: Mc Graw Hill.

Hacking, I. (2006). *La domesticación del azar. La erosión del determinismo y el nacimiento del caos*. Barcelona – España: Gedisa.

Hoyles, C. (1992): Illuminations and Reflections - Teachers, Methodologies and Maths. En Actas del *P.M.E.*, 16.

Johnson-Laird, P.N. (1994). Mental models and probabilistic thinking. *Cognition*, 50, 189-209.

Kahneman, D.; Slovic, P. & Tversky, A. (Eds.) (1982) *Judgments under Uncertainty: Heuristics and Biases*. New York: Cambridge University Press.

Lavalle, A., Micheli, E., Boché, S. (2003, Mayo). Juicios heurísticos sobre probabilidad en alumnos del profesorado en matemática. *Boletín SOAREM*, *17*, 23-31. Recuperado el 27 de enero de 2012, de http://www.soarem.org.ar/revistapremisa.htm

Latorre, A. (2003). La investigación – acción. Conocer y cambiar la práctica educativa. Barcelona – España: Graó.

Liu, Y. & Thompson, P. (2007). Teachers' Understandings of Probability. *Cognition and Instruction*, *25*(2-3), 113-160.

Martín, E. y Cervi, J. (2006). Modelos de formación docente para el cambio de concepciones en los profesores. En Pozo, J., Scheuer, N., Pérez Echeverría, M., Mateos, M., Martín, E. y De la Cruz, M. (Eds.). *Nuevas formas de pensar la enseñanza y el aprendizaje. Las concepciones de profesores y alumnos.* Barcelona, España: Graó.

Martínez, M. (1996). Cómo hacer un buen proyecto de tesis con metodología cualitativa. *HETEROTOPÍA*, 2, 63-73. Recuperado el 12 de septiembre de 2011, de http://prof.usb.ve/miguelm/proyectotesis.html

Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa. Síntesis conceptual. *Revista IIPSI. Facultad de Psicología. UNMSM*, 9(1), 123 -146.

Miranda, H. (2011). *Mathematics learning, digital resources, and the teaching and learning gap: Learning probability and statistics in Chilean elementary public schools* [Aprendizaje matemático, recursos digitales y la brecha de enseñanza y aprendizaje: aprendizaje de probabilidades y estadística en escuelas básicas chilenas]. Tesis doctoral no publicada. New Mexico State University. Las Cruces, New Mexico.

Mora, F. y Barrantes, H. (2008). ¿Qué es la matemática? Creencias y Concepciones en la Enseñanza Media Costarricense. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *4,* 71 -81.

Moreano, G., Asmad, U, Cruz, G. y Cuglievan, G. (2008). Concepciones sobre la enseñanza de las matemáticas en docentes de primaria de escuelas estatales. *Revista de Psicología*, *27*(2), 299-334.

Morin, E. (1999). *Los siete saberes necesarios para la educación del futuro*. Traducción de Mercedes Vallejo-Gómez con la contribución de Nelson Vallejo-Gómez y Françoise Girard. *UNESCO*.

Ortiz, J. J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L. y Rodríguez, J. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. En: P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 268-276). Huesca: SEIEM. ISBN: 84-8127-156-X.

Osses, S., Sánchez, I. e Ibáñez, F. (2006). Investigación cualitativa en educación. Hacia la generación de teoría a través del proceso analítico. *Estudios Pedagógicos*, *32*(1), 119 – 133.

Parra, H. (2005). Creencias matemáticas y la relación entre actores del contexto. *Relime 8(1), 69 -90.*

Pérez, S. y Guillén, G. (2007*)*. Estudio exploratorio sobre creencias y concepciones de profesores de secundaria en relación con la geometría y su enseñanza. En: M. Camacho, P. Flores, M. P. Bolea (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 295-306). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Ponte**,** J.P. & col. (1994): Teachers' and students' views and attitudes towards a new mathematics curriculum: a case study. En *Educational Studies in Mathematics*, 26, (347-366).

Pope, M. y Scott E. (2000). La epistemología y la práctica del profesor. En R. Porlán, J. García y P. Cañal (Comp.), *Constructivismo y enseñanza de las Ciencias* (pp. 177 - 189). Sevilla: Díada.

Porlán, R. (1989). *Teoría del Conocimiento, Teoría de la Enseñanza y Desarrollo Profesional. Las concepciones epistemológicas de los profesores.* Tesis Doctoral inédita. Universidad de Sevilla.

Porlán, R. (1993). Constructivismo y Escuela. Sevilla: Diada.

Porlán, R. y Martín, J. (1994). El saber práctico de los profesores especialista. Aportaciones desde las didácticas específicas. En *Investigación en la Escuela*, 24, 49-58.

Porlán, R. y Martín, J. (1996). *El diario del profesor. Un recurso para la investigación en el aula*. Sevilla: Díada.

Porlán, R., Rivero, A. y Martín del Pozo, R. (1997). Conocimiento profesional y epistemología de los profesores I: Teoría, métodos e instrumentos. *Enseñanza de las Ciencias, 15*(2), 155-171.

Pozo, J., Scheuer, N., Pérez Echeverría, M., Mateos, M., Martín, E. y De la Cruz, M. (2006). *Nuevas formas de pensar la enseñanza y el aprendizaje. Las concepciones de profesores y alumnos.* Barcelona, España: Graó.

Romagnoli, P. (2011). *Probabilidades doctas. Herramientas para la formación de profesores de matemática*. Santiago, Chile: J.C. Sáez Editor.

Ruíz, J. (2003). Metodología de la investigación cualitativa. 3era edición. *Universidad de Deusto Bilbao. Serie Ciencias Sociales*, 15.

Saavedra, E. (2005). *Contenidos básicos de Estadística y Probabilidad*. Santiago, Chile: Universidad de Santiago. Colección Ciencias.

Salcedo, A. y Mosquera, J. (2008). Sesgo de la disponibilidad en estudiantes universitarios. *Investigación y Postgrado*, 23(2), 411-432. Recuperado el 17 de septiembre de 2009, de http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3007807

Serradó, A., Cardeñoso, J. M., Azcárate, P. (2005). Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: su incidencia en los libros de texto. *Statistics Education Research Journal,* 4(2), 59-81. Recuperado el 6 de enero de 2010, de http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php?show=serjarchive

Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J. J. (1996). Interpretación de enunciados de probabilidad en términos frecuenciales por alumnos del Bachillerato. *SUMA*, 22, 43 – 50.

Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J. J. y Cañizares, M. J. (2001). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre modelos probabilísticos en las secuencias de resultados aleatorios. *SUMA*, 36, 23 – 32.

Shaughnessy**,** J. M. (1992). Research in Probability and Statistics: Reflections and Directions". En Grouws (Ed): *The teaching and learning of the mathematics*. New York:Macmillam.

Soto, J. (2000). *Al Azar del cara o sello*. *Introducción al Cálculo de Probabilidades. Módulo de Probabilidades.* Santiago, Chile: Ministerio de Educación.

Thompson**,** A. G. (1992): Teachers' Bielefs and Conceptions: A Synthesis of Research. En Grouws (Ed.): *Handbook of Research on Matematics Teaching and Learning.* New York: NCTM, MacMillan Publishing Company.

Revista Unión (2006). Educación Estadística en la Matemática Escolar: retos para la Enseñanza y la Formación del Profesor. (Documento de discusión). *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *8*, 63 – 75.

Ruiz, C. (2011). *Validez*. Documento de trabajo del Seminario Taller para Asesores de Tesis. Recuperado el 10 de noviembre de 2011, de http://investigacion.upeu.edu.pe/images/7/74/Validez.pdf

Varas, L. (2008). *Análisis de la calidad de clases de matemática. Teorema de Pitágoras y razonamiento matemático*. *(Informe Final Proyecto FONIDE N°: 209 – 2006)*. Informe de investigación financiada por el Departamento de Estudios y Desarrollo, División de Planificación y Presupuesto, Ministerio de Educación, Chile. Recuperado el 15 de agosto de 2011, desde http://www.fonide.cl/DedPublico/documentos

Woods, P. (1986). *La escuela por dentro. La etnografía en la investigación educativa*. Temas de educación. Barcelona: Paidós.

ANEXOS

A continuación se presentan los anexos que contienen la siguiente información:

Anexo 1:

Pauta de evaluación del cuestionario abierto para los expertos.

Anexo 2:

Análisis de las respuestas de los expertos para validar los ítems.

Anexo 3:

Resultados de la evaluación del cuestionario por los expertos y ejemplos de recomendaciones.

Anexo 4:

Cuestionario final de ítems abiertos sobre azar y probabilidades.

Anexo 5:

Pauta de entrevista para profesores de Enseñanza Básica.

Anexo 6:

Pauta de entrevista para profesores de Enseñanza Media.

ANEXO 1: PAUTA DE EVALUACIÓN CUESTIONARIO ABIERTO

Nombre del evaluador: _________________________ Fecha: _________________

Título / Grado Académico: ________________________

Estimado(a) evaluador(a):

En el documento "Ítemes para cuestionario abierto", encontrará el material para evaluar. Para cada ítem le pedimos por favor que se pronuncie acerca de los siguientes aspectos:

- **Claridad**: el ítem es claro en cuanto a la comunicabilidad de la situación y no se presta para ambigüedades. Muy de acuerdo (5), Acuerdo (4), Ni acuerdo ni desacuerdo (3), desacuerdo (2) y Muy en desacuerdo (1).

- **Pertinencia:** permite recoger información importante acerca de las concepciones de los profesores respecto del azar, las probabilidades y su enseñanza. Muy de acuerdo (5), Acuerdo (4), ni acuerdo ni desacuerdo (3), desacuerdo (2) y muy en desacuerdo (1).

- **Conceptualmente correcto**: no revela errores conceptuales. Muy de acuerdo (5), acuerdo (4), ni acuerdo ni desacuerdo (3), desacuerdo (2) y muy en desacuerdo (1).

- **Nivel de dificultad:** con relación a los demás ítemes presentados. Fácil (F), mediana dificultad (M) y difícil (D).

- **Aprobación:** Aprobado (A), aprobado con reparos (AR), rechazado (R)

En base a la clasificación de cada ítem, justifique brevemente sus opciones. En la parte final de la evaluación le solicitamos que realice observaciones generales y sugerencias.

Desde ya agradezco mucho su colaboración. Muy atentamente,

Mauricio Moya Márquez. Marzo, 2010.

Ítem 1	Escala o graduación					Observaciones/ Sugerencias
Claridad	5	4	3	2	1	
Pertinencia	5	4	3	2	1	
Conceptualmente correcto	5	4	3	2	1	
Dificultad	D	M	F			
Aprueba el ítem	A	AR	R			

Ítem 2	Escala o graduación					Observaciones/ Sugerencias
Claridad	5	4	3	2	1	
Pertinencia	5	4	3	2	1	
Conceptualmente correcto	5	4	3	2	1	
Dificultad	D	M	F			
Aprueba el ítem	A	AR	R			

…

Ítem 29	Escala o graduación					Observaciones/ Sugerencias
Claridad	5	4	3	2	1	
Pertinencia	5	4	3	2	1	
Conceptualmente correcto	5	4	3	2	1	
Dificultad	D	M	F			
Aprueba el ítem	A	AR	R			

Ítem 30	Escala o graduación					Observaciones/ Sugerencias
Claridad	5	4	3	2	1	
Pertinencia	5	4	3	2	1	
Conceptualmente correcto	5	4	3	2	1	
Dificultad	D	M	F			
Aprueba el ítem	A	AR	R			

Observaciones generales

1. Si tuviera que hacer una selección de los 15 mejores ítemes, ¿cuáles serían estos? Anote los números a continuación.

2. Si en los ítemes revisados usted no encontró algún tipo de ejercicios o problemas que a su juicio son relevantes para obtener la información buscada, por favor descríbalos brevemente a continuación.

3. Por último, realice las observaciones y/o sugerencias generales que estime conveniente, de manera de mejorar el cuestionario abierto en función de lograr los objetivos.

ANEXO 2: ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LOS EXPERTOS PARA VALIDAR LOS ÍTEMS

A partir de las respuestas de los jueces expertos, quienes evaluaron el cuadernillo de ítems en forma separada, se construyeron tablas con los promedios obtenidos acorde a las categorías establecidas. Posteriormente la misma información se muestra en gráficos de barras comparadas. Acorde a las recomendaciones de Ruiz (2011) y Corral (2009), los **criterios** para Aprobar o Rechazar los ítems fueron los siguientes:

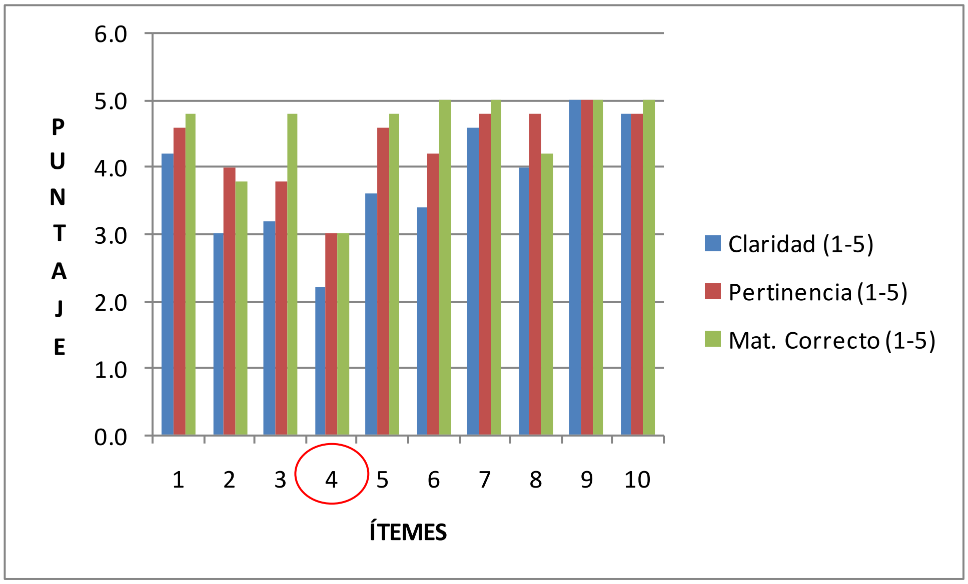
1. Los ítems que tienen 100% de coincidencia favorable entre los jueces (congruentes, claros en su redacción y no tendenciosos) quedan incluidos en el instrumento.
2. Los ítems que tengan 100% de coincidencia desfavorable entre los jueces quedan excluidos del instrumento.
3. Los ítems que tengan una coincidencia parcial entre los jueces deben ser revisados, reformulados o sustituidos, si es necesario, y nuevamente validados.

Ítems 1 - 10

Tabla 1: Resultados de evaluación por expertos en cuanto a claridad, pertinencia y matemáticamente correcto de los ítems. Se consideran los promedios acorde a la escala de 1 a 5.

	ITEM									
Aspecto	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Claridad (1-5)	4.2	3.0	3.2	2.2	3.6	3.4	4.6	4.0	5.0	4.8
Pertinencia (1-5)	4.6	4.0	3.8	3.0	4.6	4.2	4.8	4.8	5.0	4.8
Mat. Correcto (1-5)	4.8	3.8	4.8	3.0	4.8	5.0	5.0	4.2	5.0	5.0

Gráfico 1: Resultados de evaluación por expertos en cuanto a claridad, pertinencia y matemáticamente correcto de los ítems. <u>Se consideran los promedios acorde a la escala de 1 a 5.</u>



Comentario: En el gráfico se puede apreciar niveles aceptables de claridad, pertinencia y condición de ser matemáticamente correctos. No obstante, el **ítem 4** se destaca por un bajo puntaje en las categorías mencionadas.

Tabla 2: Resultados de evaluación por expertos en cuanto a dificultad y aprobación de los ítems. <u>Se consideran los promedios acorde a la escala de 1 a 3.</u>

	ITEM									
Aspecto	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Dificultad (1-3)	1.6	1.4	1.6	2.0	2.0	1.8	1.6	2.2	2.0	2.2
Aprobación (1-3)	2.4	2.0	2.0	1.2	2.2	2.2	3.0	3.0	3.0	3.0
Aprobación (%)	80	67	67	40	73	73	100	100	100	100
Clasificación	*AR*	*AR*	*AR*	*R*	*AR*	*AR*	*A*	*A*	*A*	*A*
	F	*F*	*F*	*M*	*M*	*F*	*F*	*M*	*M*	*M*

Donde **A**: Aprobado (3), **AR**: Aprobado con reparos (2) y **R**: Rechazado (1)
Además **F**: Fácil, **M**: Mediana dificultad y **D**: Difícil

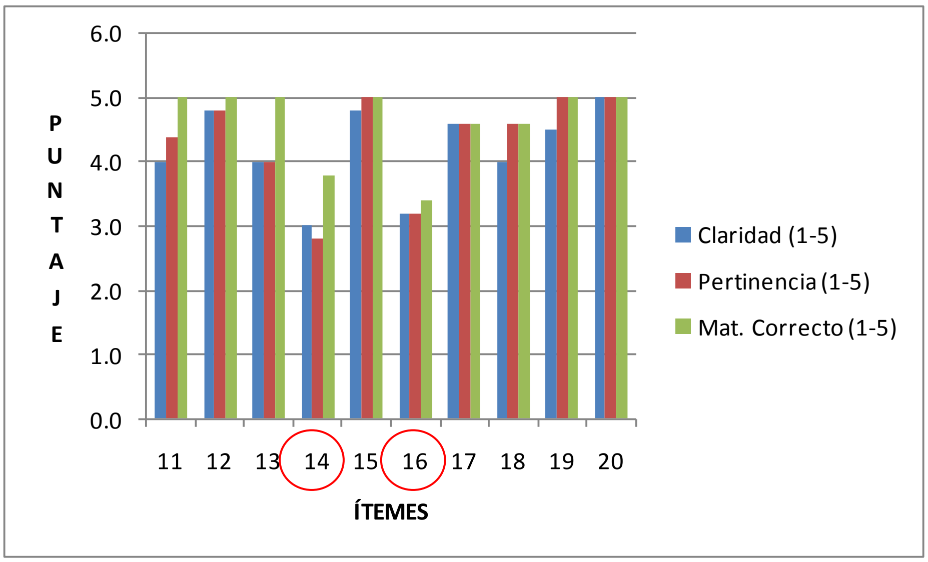
Comentario: En la tabla se puede apreciar niveles aceptables de aprobación. No obstante, el **ítem 4** se destaca por un bajo puntaje en la categoría mencionada. <u>Por ello este ítem fue rechazado</u>

Ítems 11 – 20

Tabla 3: Resultados de evaluación por expertos en cuanto a claridad, pertinencia y matemáticamente correcto de los ítems. Se consideran los promedios acorde a la escala de 1 a 5.

	ITEM									
Aspecto	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Claridad (1-5)	4.0	4.8	4.0	3.0	4.8	3.2	4.6	4.0	4.5	5.0
Pertinencia (1-5)	4.4	4.8	4.0	2.8	5.0	3.2	4.6	4.6	5.0	5.0
Mat. Correcto (1-5)	5.0	5.0	5.0	3.8	5.0	3.4	4.6	4.6	5.0	5.0

Gráfico 2: Resultados de evaluación por expertos en cuanto a claridad, pertinencia y matemáticamente correcto de los ítems. Se consideran los promedios acorde a la escala de 1 a 5.



Comentario: En el gráfico se puede apreciar niveles aceptables de claridad, pertinencia y condición de ser matemáticamente correctos. No obstante, los **ítems 14 y 16** se destacan por un bajo puntaje en las categorías mencionadas.

Tabla 4: Resultados de evaluación por expertos en cuanto a dificultad y aprobación de los ítems. Se consideran los promedios acorde a la escala de 1 a 3.

	ITEM									
Aspecto	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Dificultad (1-3)	1.8	2.4	2.8	2.0	2.0	1.8	1.6	2.2	1.6	2.2
Aprobación (1-3)	2.2	3.0	3.0	1.4	3.0	1.2	3.0	3.0	3.0	3.0
Aprobación (%)	73	100	100	47	100	40	100	100	100	100
Clasificación	*AR*	*A*	*A*	*R*	*A*	*R*	*A*	*A*	*A*	*A*
	F	*M*	*D*	*M*	*M*	*F*	*F*	*M*	*F*	*M*

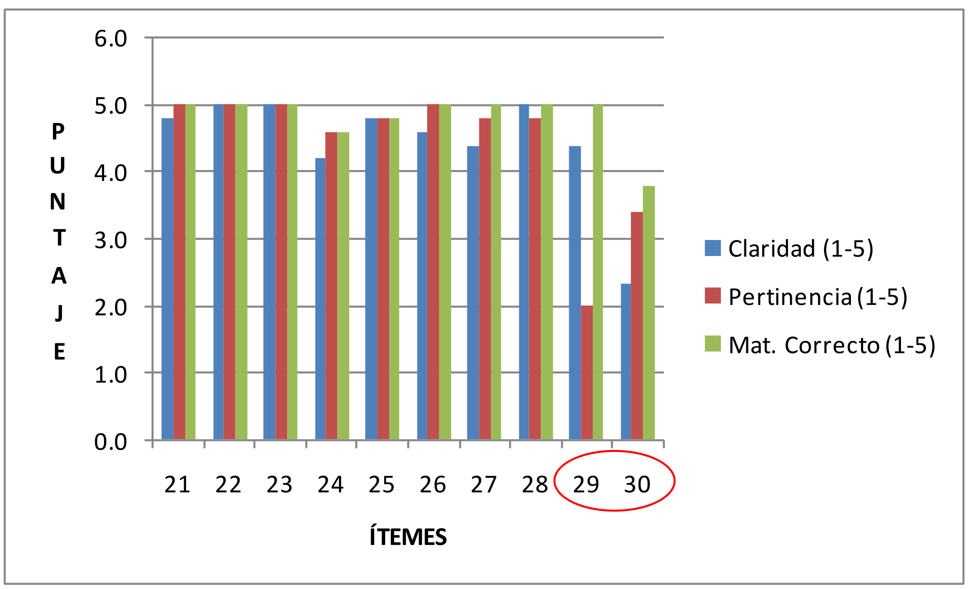
<u>Comentario:</u> En la tabla anterior se puede apreciar niveles aceptables de aprobación. No obstante, los **ítems 14 y 16** se destacan por un bajo puntaje en la categoría mencionada. <u>Por ello estos ítems fueron rechazados.</u>

Ítems 21 – 30

Tabla 5: Resultados de evaluación por expertos en cuanto a claridad, pertinencia y matemáticamente correcto de los ítems. <u>Se consideran los promedios acorde a la escala de 1 a 5.</u>

	ITEM									
Aspecto	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
Claridad (1-5)	4.8	5.0	5.0	4.2	4.8	4.6	4.4	5.0	4.4	2.3
Pertinencia (1-5)	5.0	5.0	5.0	4.6	4.8	5.0	4.8	4.8	2.0	3.4
Mat. Correcto (1-5)	5.0	5.0	5.0	4.6	4.8	5.0	5.0	5.0	5.0	3.8

Gráfico 3: Resultados de evaluación por expertos en cuanto a claridad, pertinencia y matemáticamente correcto de los ítems. <u>Se consideran los promedios acorde a la escala de 1 a 5.</u>



<u>Comentario:</u> En el gráfico se puede apreciar niveles aceptables de claridad, pertinencia y condición de ser matemáticamente correctos. No obstante, los **ítems 29 y 30** se destacan por un bajo puntaje en las categorías mencionadas.

Tabla 6: Resultados de evaluación por expertos en cuanto a dificultad y aprobación de los ítems. Se consideran los promedios acorde a la escala de 1 a 3.

	ITEM									
Aspecto	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
Dificultad (1-3)	1.4	1.4	1.0	2.8	2.6	2.2	2.6	2.0	2.2	1.3
Aprobación (1-3)	3.0	3.0	2.0	2.4	3.0	3.0	3.0	3.0	1.4	1.2
Aprobación (%)	100	100	67	80	100	100	100	100	47	40
Clasificación	*A*	*A*	*AR*	*AR*	*A*	*A*	*A*	*A*	*R*	*R*
	F	*F*	*F*	*D*	*D*	*M*	*D*	*M*	*M*	*F*

Comentario: En la tabla se puede apreciar niveles aceptables de aprobación. No obstante, los **ítems 29 y 30** se destacan por un bajo puntaje en la categoría mencionada. Por ello estos ítems fueron rechazados.

ANEXO 3: RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN DEL CUESTIONARIO POR LOS EXPERTOS Y EJEMPLOS DE RECOMENDACIONES

Ítem	Eval.	Dif.	Observaciones principales	Estado final
1	AR	F	(Ev.3) Revisar redacción. (Ev.4) Revisar redacción para evitar más de una interpretación en las proposiciones. (Ev.2) Revisar el sentido de la segunda parte. (Ev.5) S/O (Ev.1) Cuidar el uso de términos de fuerte connotación matemática, por ejemplo "suceso". Unificar la forma de redactar los enunciados del 1 al 9. Evitar ambigüedades.	Corregido
2	AR	F	(Ev.3) Algunas inconsistencias entre texto y gráfica. (Ev.4) Revisar redacción y precisar algunos conceptos y el gráfico. (Ev.2) Mejorar el enunciado y el gráfico. (Ev.5) Establecer coherencia entre enunciado y gráfico, respecto al número de lanzamientos. Definir "fortuna". (Ev.1). Clarificar algunos temas del juego, por ejemplo, la situación con los negativos (cuando no quedan monedas e igual se pierde). Cambiar el término de "Fortuna" por otro.	Corregido
4	**R**	M	(Ev.3) Clarificar el sentido del ítem. Mejorar la instrucción. (Ev.4) Clarificar el sentido del ítem. Mejorar la instrucción. (Ev.2). Mejorar la instrucción y sentido del ítem. (Ev.5) No está claro el propósito del ítem. (Ev.1) Mejorar la instrucción del ítem.	**Eliminado**
6	AR	F	(Ev.3) Mejorar el sentido de la pregunta y de lo que se espera. (Ev.4) Mejorar el sentido de la pregunta y de lo que se espera. (Ev.2) Aclarar lo que se entiende por "regularidad". Mejorar el sentido de la pregunta y de lo que se espera. (Ev.5) Clarificar el propósito de este ítem. (Ev.1) No ve aporte al usar el contexto de Applet. El ítem parece artificial acorde a la pregunta que se hace.	Corregido
7	A	F	(Ev.3) S/O (Ev.4) Redacción. (Ev.2) S/O	Mejorado

			(Ev.5) S/O (Ev.1) S/O.	
10	A	M	(Ev.3) S/O (Ev.4) Mejorar la redacción para evitar ambigüedades. El concepto de la última pregunta tal vez ya está evaluado en 1 y 2. Revisar. (Ev.2) S/O (Ev.5) Precisar que los dados son “no cargados”. Revisar redacción. (Ev.1) Parecen tres ítemes en uno y que miden lo mismo. Se sugiere separar o elegir uno.	Mejorado
14	**R**	M	(Ev.3) S/O (Ev.4) No hay claridad en la respuesta esperada. (Ev.2) Difícil. Alternativas muy amplias. (Ev.5) S/O (Ev.1) S/O	**Eliminado**
15	A	M	(Ev.3) S/O (Ev.4) S/O (Ev.2) Redacción. (Ev.5) S/O (Ev.1) S/O	Mejorado
16	**R**	F	(Ev.3) Interesante ítem, pero se complica al involucrar fenómenos reales (actividad de la bolsa). (Ev.4) S/O (Ev.2) No entendió el problema. (Ev.5) S/O (Ev.1) S/O	**Eliminado**
21	A	F	(Ev.3) S/O (Ev.4) S/O (Ev.2) S/O (Ev.5) S/O (Ev.1) Redacción.	Mejorado
24	AR	D	(Ev.3) S/O (Ev.4) Mejorar la primera pregunta. (Ev.2) Es una pregunta larga. Mucha lectura. ¿Cuál es el propósito del ítem? Además, no entendió.	Corregido

			(Ev.5) S/O (Ev.1) S/O	
25	A	D	(Ev.3) S/O (Ev.4) No usar nombres registrados. (Ev.2) Mejorar el enunciado. Hacer menos preguntas. (Ev.5) S/O (Ev.1) S/O	Mejorado
28	A	M	(Ev.3) S/O (Ev.4) S/O (Ev.2) Mejorar las preguntas. (Ev.5) S/O (Ev.1) S/O	Mejorado
29	**R**	M	(Ev.3) S/O (Ev.4) Mejorar el sentido de la pregunta. El contexto no es bueno. (Ev.2) Clarificar el sentido de la pregunta. Mejorar redacción de la instrucción. (Ev.5) Cuidar detalles en la redacción de los enunciados para que sigan siendo equivalentes y no se produzcan confusiones. (Ev.1) S/O	**Eliminado**
30	**R**	F	(Ev.3) ¿Sólo un ítem dedicado a la enseñanza? ¿Por qué tan poco? (Ev.4) Mejorar la redacción. Precisar conceptos. (Ev.2) S/O (Ev.5) Mejorar la redacción de la pregunta 5. (Ev.1) Clarificar lo que se entenderá por aleatoriedad y probabilidad, de modo que los profesores no se dejen llevar por los problemas anteriores, que en general son difíciles o de contenidos superiores como probabilidad condicionada.	**Eliminado**

ANEXO 4: CUESTIONARIO FINAL DE ÍTEMS ABIERTOS

Ítem 1

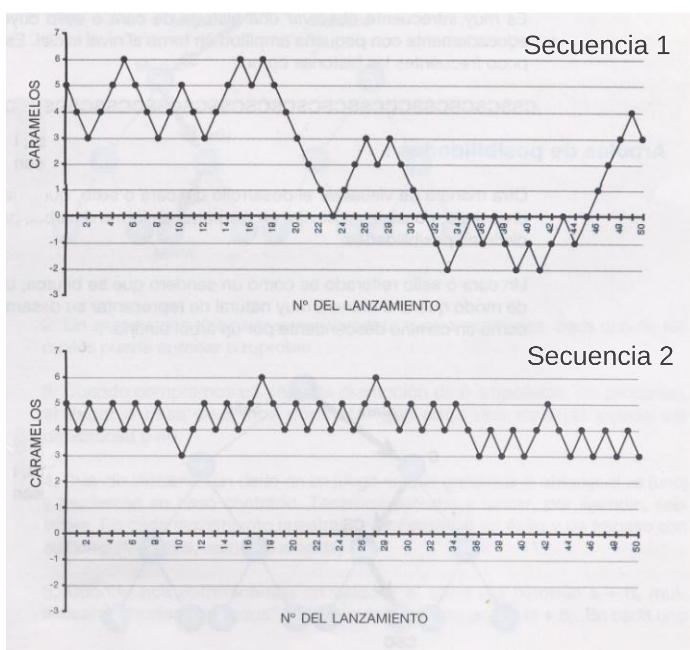
A continuación se describen brevemente una serie de situaciones o fenómenos. ¿Cuáles de ellos piensa usted que son aleatorios, es decir, relacionados con el azar? Justifique en cada caso por qué los considera aleatorios o no aleatorios.

1) La germinación de una semilla plantada.
2) El número que se obtiene al lanzar un dado de seis caras no cargado.
3) Acertar al número que se obtiene al lanzar un dado de seis caras no cargado.
4) La cantidad de caras que se obtienen en 100 lanzamientos de una moneda sin trucar.
5) Llovió en Santiago el 3 de abril de 2009.
6) Lloverá mañana en Santiago.
7) Lloverá en Santiago dentro de un mes.
8) La próxima idea que se le venga a la cabeza.
9) Enfermarse con gripe o influenza el mes que viene.

- Se le ocurren otras situaciones o fenómenos aleatorios. Descríbalos brevemente.
- Se le ocurren otras situaciones o fenómenos no aleatorios. Descríbalos brevemente.
- Para que un fenómeno sea aleatorio, ¿qué características debe tener?
- ¿Qué significado tiene para usted la palabra azar?

Ítem 2

Se realiza el siguiente juego, asociado al lanzamiento de una moneda 50 veces. Cada vez que sale cara usted gana un caramelo y pierde uno cuando sale sello. Suponga que el juego parte con cinco caramelos. En el caso de que usted no tenga caramelos (0) y vuelve a perder, entonces esto se registrará con valores -1, -2, -3…. Al graficar la situación del juego, cuál de las dos secuencias siguientes es más realista de suceder:



Ítem 3

Asigne un valor numérico, entre 0 y 10, que exprese la posibilidad de ocurrencia de los siguientes sucesos. El valor cero (0) indica “ninguna posibilidad”, mientras que el diez (10) indica “absoluta seguridad en que ocurra”. Justifique en cada caso la asignación del valor. Agregue dos sucesos más y asígneles un valor.

Valor	Sucesos
	Obtener un sello al tirar una moneda honesta o sin trucar, después de haber obtenido una secuencia de cuatro caras seguidas.
	Encender la luz al pulsar el interruptor.
	No enfermarse de gripe o influenza el mes que viene.
	Obtener suma igual a 7, al lanzar dos dados de seis caras no cargados.
	Que nieve este invierno en Santiago.
	Que llueva mañana en Santiago.

Ítem 5

Se lanzan repetidas veces 2 monedas. Los resultados se registran en la siguiente tabla:

N° de veces que se lanzan las monedas	N° de veces que sale **CC**	N° de veces que sale **CS**	N° de veces que sale **SS**	Frecuencia relativa de **CC**	Frecuencia relativa de **CS**	Frecuencia relativa de **SS**
10	3	6	1	0,300	0,600	0,100
50	13	22	15	0,260	0,440	0,300
100	30	54	16	0,300	0,540	0,160
150	33	75	42	0,220	0,500	0,280
200	53	88	59	0,265	0,440	0,295
250	56	129	65	0,224	0,516	0,260
300	75	152	73	0,250	0,507	0,243
350	89	180	81	0,254	0,514	0,231
400	90	209	101	0,225	0,523	0,253
450	114	229	107	0,253	0,509	0,238
500	122	250	128	0,244	0,500	0,256
750	198	360	192	0,264	0,480	0,256
1000	249	499	252	0,249	0,499	0,252

CC: Salen dos caras SS: Salen dos sellos CS: Salen una cara y un sello

- Esboce un gráfico de barras que refleje los resultados de los 1000 lanzamientos en la tabla. Ubique en el eje horizontal los resultados CC, SS y CS. ¿Qué se puede observar en el gráfico?

- Considerando los resultados de la tabla, si ahora se hicieran 2.000 lanzamientos de las dos monedas, ¿a qué resultado usted apostaría: CC, SS o CS? ¿Y si fueran 10.000 lanzamientos? ¿Por qué?

- Acorde a los resultados de la tabla, asigne un valor a las siguientes probabilidades:
  - Probabilidad de obtener CC =
  - Probabilidad de obtener SS =
  - Probabilidad de obtener CS =

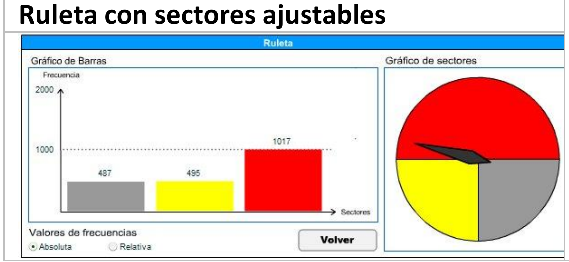
- ¿Cuál de las probabilidades anteriores es mayor? ¿Por qué?

Ítem 6

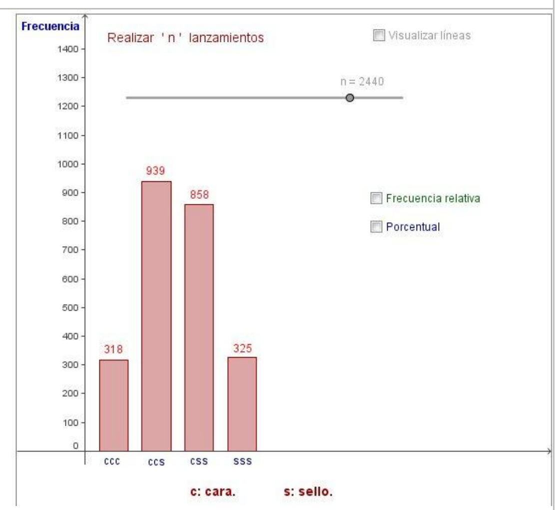
A continuación se muestran algunos recursos tecnológicos (applets) con los cuales se pueden realizar simulaciones de experimentos aleatorios. Observe cada recurso e indique cuál es la regularidad que se muestra e intente explicarla.

Lanzamiento de dos dados y registro de la suma

Ruleta con sectores ajustables



Lanzamiento de tres monedas



Con cada recurso digital (Applet) realice lo siguiente:

1. Indique cuál es el experimento aleatorio que simula.
2. Observe detenidamente su funcionamiento.
3. Cuando se realizan pocos lanzamientos (10, 20, 30…), ¿qué sucede con el gráfico?
4. Al realizar el experimento un número elevado de veces (1000, 2000, 5000…), ¿qué observa?
5. Explique el fenómeno observado.

Ítem 7

En cuatro lanzamientos sucesivos de una moneda no cargada, sale cara cada vez. Si la moneda se lanza una quinta vez, ¿qué es más probable que salga: cara o sello? ¿Por qué?

Ítem 8

Se lanza una moneda no cargada 8 veces consecutivas. Si denotamos por C cuando sale cara y S cuando sale sello, entonces ¿cree usted que alguna de las siguientes secuencias es más probable que otra? Justifique su respuesta.

a) CCCCCCCC
b) CSCSCSCS
c) CSSCSCCS

Ítem 9

Si se lanzan tres monedas, ¿cuál es la probabilidad de obtener a lo más dos caras?

Ítem 10

a) Consideremos el siguiente juego. Se lanzan dos dados de seis caras no cargados y se calcula el producto de los números que aparecen. Si el resultado es par gana el jugador B y si el resultado es impar gana A. ¿Qué jugador escogerían ser? ¿Es justo el juego? ¿Por qué?

b) Si se modifica el juego y en lugar del producto ahora se considera la suma de las caras. Si el resultado es par gana el jugador B y si el resultado es impar gana A. ¿Qué jugador escogerían ser? ¿Por qué?

c) Si tuvieran que apostar una gran cantidad de dinero al resultado de sumar los dos dados cuando son lanzados, entonces ¿a qué número apostarías, al 5 o al 6? ¿Por qué?

Ítem 11

A continuación se plantean algunas situaciones en contexto, léalas detenidamente, elabore una respuesta que considere más adecuada y justifíquela detalladamente.

a) ¿Qué significa que un meteorólogo anuncie que hay un 30% de posibilidades de que llueva mañana?

b) Un entrevistador le pregunta a 30 personas sobre cuál bebida les gusta más, bebida A o bebida B. El resultado fue que 18 personas dijeron A. Según lo anterior, ¿cuál es la probabilidad de que a una persona le guste la bebida A?

Ítem 12

Se tienen dos grupos de 10 personas cada uno. Con el primer grupo se forman todos los comités distintos y posibles de dos personas cada uno. Con el segundo grupo se forman todos los comités distintos y posibles de ocho personas cada uno. Si se selecciona al azar uno de los comités formados, entonces ¿cuál de las siguientes alternativas es la correcta?

a) Es más probable seleccionar un comité de dos personas
b) Es más probable seleccionar un comité de ocho personas
c) Todos estos resultados son igualmente probables.

Ítem 13

En una ciudad existen dos hospitales, uno más grande que el otro. En el más pequeño se registran 15 nacimientos diarios, en promedio al año, mientras que en el otro hospital de mayores dimensiones, se registran 45 nacimientos diarios en promedio, aproximadamente.

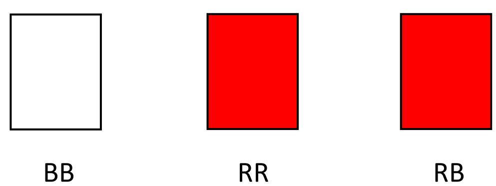
Se sabe que en general el 50% del total de los recién nacidos son varones, sin embargo, si nos centramos en un recuento diario ese porcentajes varía.

En cada uno de los hospitales indicados se han contabilizado, a lo largo de todo un año, los días en los que el porcentaje de varones superó el 70% de los nacimientos de dicho día. ¿En qué hospital cree usted que esta circunstancia ha ocurrido un mayor número de días? ¿Por qué?

a) En el hospital pequeño
b) En el hospital grande
c) Existen las mismas posibilidades de que sea en uno u otro hospital

Ítem 15

Imagine tres cartas: una con ambos lados de color rojo, otra con ambos lados de color blanco y una tercera con un lado rojo y el otro blanco. Si se esconden las tres cartas en un sombrero y luego se saca una y se muestra por un lado resultando rojo, entonces ¿cuál es la probabilidad que el otro lado sea rojo también?



Ítem 17

Se tienen dos esquemas, 1 y 2, formados por varias filas de círculos. En cada esquema se trata de pasar de un círculo cualquiera de la primera fila a un círculo cualquiera de la última fila, de tal modo que desde un círculo sólo puede saltarse a otro cualquiera pero que esté en la fila inmediatamente inferior.

Esquema 1

O O O O O O O O
O O O O O O O O
O O O O O O O O

Esquema 2

O O
O O
O O
O O
O O
O O
O O
O O
O O

Un ejemplo de trayecto es el siguiente:

Esquema 1

~~O~~	O	O	O	O	O	O	O
O	O	~~O~~	O	O	O	O	O
O	O	O	O	O	O	O	~~O~~

Esquema 2

O	~~O~~
O	~~O~~
~~O~~	O
O	~~O~~
~~O~~	O
O	~~O~~
~~O~~	O
~~O~~	O
O	~~O~~

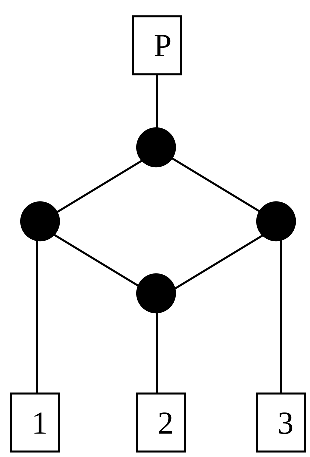
¿En cuál de los dos esquemas hay más formas de realizar el tipo de trayecto solicitado? Justifique su respuesta.

a) En el primer esquema
b) En el segundo esquema
c) El número de formas de realizar el trayecto es igual en ambos esquemas

Ítem 18

Observa la siguiente figura. Supongamos que un turista parte del punto P y piensa llegar hasta alguno de los puntos (1), (2) o (3), pero no tiene decidido cuál será su destino. Lo decidirá sobre la marcha, según llegue a cada cruce. El turista siempre camina hacia adelante, nunca retrocede.

Determine la probabilidad de que el turista termine su recorrido en cada uno de los tres puntos.



Ítem 19A

Una urna A contiene 3 fichas negras y 1 ficha blanca, mientras que una urna B contiene 2 fichas negras y 1 blanca. Si tienes que sacar una ficha negra para ganar un premio, sin mirar dentro de la urna, ¿cuál urna elegirías? ¿Por qué?

Ítem 19B

Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luis tiene en su caja 30 bolas blancas y 60 negras. Organizan un juego que consiste en extraer una bola de sus cajas.

El ganador es el niño que saque primero una bola blanca. Si ambos sacan simultáneamente una bola blanca o una bola negra, ninguno gana, devuelven las bolas a las cajas y el juego continúa. Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luis hay más bolas blancas que en la suya. ¿Qué opinas de esto?

Ítem 20

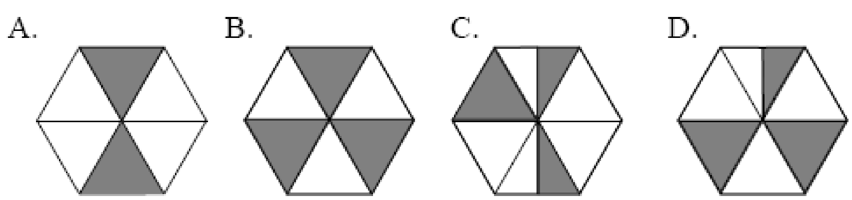
a) Considere una urna con 10 bolitas rojas y 6 blancas. El experimento consiste en sacar dos bolitas. Se extrae la primera, se registra el color y luego se vuelve a introducir (con reposición). Se extrae la segunda, se registra el color y se introduce nuevamente. Calcule la probabilidad de:

   1. Extraer dos bolitas rojas
   2. Extraer dos bolitas blancas
   3. Extraer una bolita blanca y roja

b) Calcule las probabilidades anteriores, pero ahora considere el experimento anterior sin reposición. ¿Cómo varían los resultados? ¿Por qué?

Ítem 21

Se lanza un dardo en cada uno de estos blancos hexagonales. Cada blanco está dividido en seis triángulos equiláteros y, a su vez, en algunos casos, los triángulos están divididos en dos partes iguales. Según esto, ¿en cuál de los blancos el dardo tiene la mayor probabilidad de caer en una zona sombreada? ¿Por qué?



Ítem 22

Desde un lote de 3.000 ampolletas, 100 fueron seleccionadas al azar y analizadas para un control de calidad de rutina en una tienda de artículos eléctricos. Si 5 de las ampolletas de la muestra seleccionada estaban malas, entonces ¿cuántas ampolletas malas aproximadamente se esperaría encontrar en el lote completo? ¿Por qué?

Ítem 23

Hay once fichas etiquetadas con los números: 2, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 14, 18 y 20. Todas las fichas se ponen en una bolsa y se mezclan. Si se saca una ficha de la bolsa sin mirar, ¿cuál es la probabilidad de que al extraer una ficha el número sea múltiplo de tres?

Ítem 24

Situaciones en las cuales hay riesgo son usuales en la vida cotidiana. Y en algunos casos pueden ser muy ilustrativas; por ejemplo, en un episodio del popular programa de televisión "¿Quién quiere ser millonario?", una concursante se encontró ante una situación en la que debía escoger entre:

1. Responder a una pregunta de selección múltiple con cuatro opciones de respuesta para ganar $50.000.000, en caso de acertar, o quedarse con los $10.000.000 correspondientes al último juego, si se equivocaba. O bien,

2. Retirarse con los $20.000.000 que tenía acumulados.

En este concurso, los participantes pueden utilizar tres ayudas. Una de ellas, por ejemplo, consiste en el 50-50 que significa eliminar dos alternativas. Suponga que la concursante **no conoce** la respuesta a la pregunta. Si a ella solo le quedara la ayuda del 50 – 50, ¿qué le recomendaría usted? ¿Por qué?

Ahora, supongamos que los organizadores del juego lo modifican y que desde el inicio de cada programa le entregan a los participantes $50.000.000 y a medida que el concursante juega va devolviendo dinero. Las nuevas opciones son:

1. Responder a una pregunta de selección múltiple con cuatro opciones de respuesta para regresar $40.000.000 en caso de fallar, o quedarse con todo, si se acierta. Al igual que antes, la concursante puede eliminar dos alternativas. O bien,
2. Devolver $30.000.000 para no tener que jugar.

Bajo estas nuevas condiciones, ¿qué es mejor, retirarse o arriesgarse? ¿Por qué?

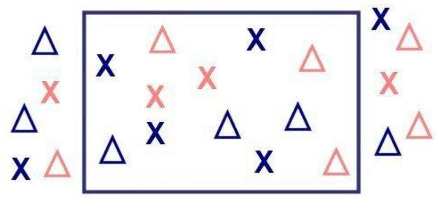
Ítem 25

Suponga que usted está investigando acerca de las posibilidades de ganar en un nuevo juego de azar, tal como los que se promocionan en los medios de comunicación. En este nuevo juego, la idea es marcar en el cartón cuatro números distintos, escogidos entre los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

a) ¿Cuántas combinaciones de cuatro dígitos distintos se pueden escoger desde los seis números anteriormente señalados?
b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 2 aciertos?
c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener el premio mayor?

Ítem 26

En una mesa hay 22 fichas en total, algunas con forma de Δ y otras con forma de **X.** Ellas pueden estar dentro del rectángulo, o bien fuera de él. Además, pueden ser rojas o negras.



Si se extrae al azar una ficha, entonces:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté dentro del rectángulo y sea negra?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que se roja y tenga forma de X?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea roja, si se sabe que está fuera del rectángulo?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra, si se sabe que está dentro del rectángulo y además es triangular?

Ítem 27

Considera el siguiente problema. El 60% de las cartas de Luis son rojas y de éstas la mitad tienen figuras. El otro 40% de las cartas de Luis, son blancas y de ellas tres cuartos tienen figuras. Si el experimento consiste en sacar una carta al azar, determina las siguientes probabilidades:

a) Que tenga figura.
b) Que no tenga figura, si se sabe que es roja.
c) Que sea blanca, si se sabe que tiene figura.
d) Que sea roja, si se sabe que no tiene figura.

Ítem 28

En un banco se ha realizado una encuesta a 200 clientes, respecto a la eficiencia del servicio. Los resultados de esa encuesta se encuentran resumidos en la siguiente tabla:

	Hombres	Mujeres	Total
Conformes	70	55	125
No conformes	40	35	75
Total	110	90	200

Según estos datos responde lo siguiente:

a. ¿Cuál es la probabilidad de elegir a un hombre y que no esté conforme con la eficiencia del servicio? ¿Por qué?
b. ¿Cuál es la probabilidad de escoger entre las mujeres una que esté conforme con el servicio? ¿Por qué?
c. ¿Cuál es la probabilidad de elegir entre las personas conformes con la eficiencia, a un hombre? ¿Por qué?

ANEXO 5: PAUTA DE ENTREVISTA PARA PROFESORES (E. BÁSICA)

5 de agosto de 2010

NOMBRE: ___________________________________

SECCIÓN A

A continuación se plantean algunas preguntas en relación a la enseñanza y aprendizaje de las nociones de azar y probabilidades para estudiantes de enseñanza básica.

1. ¿Cree usted que los estudiantes de básica pueden aprender estas nociones o contenidos? ¿Desde qué nivel?

2. ¿Qué dificultades considera usted que los estudiantes pueden tener al participar en actividades relacionadas con estos temas?

3. ¿Qué tipo de estrategias utilizaría usted para enseñar las nociones de azar y probabilidad a estudiantes de segundo ciclo básico?

4. ¿Cómo considera estos tópicos en relación con otros ejes o áreas del currículo en matemática, de igual relevancia o no? ¿Por qué?

5. ¿Qué le parece que el nuevo marco curricular chileno, contemple un eje de datos y azar (estadística y probabilidades) en un continuo desde 1° básico a 4° medio?

6. ¿Qué tipo de recursos o materiales son necesarios para enseñar adecuadamente las nociones de azar y probabilidad?

7. Acorde a su formación matemática, ¿cuán preparado se siente usted para enseñar los contenidos del eje de Datos y Azar, particularmente, respecto al azar y las probabilidades?

8. ¿Cree que hay suficiente información y apoyos accesibles para llevar a cabo los requerimientos curriculares del eje de Datos y Azar y, particularmente, respecto a la enseñanza del azar y las probabilidades?

SECCIÓN B

Las siguientes preguntas tienen que ver con el **CUADERNILLO** trabajado en el taller**.**

1. ¿Qué es para usted el concepto de aleatorio? ¿Qué es el azar? ¿Cómo explicaría estos conceptos a un estudiante?

2. ¿Qué significa para usted el término probabilidad? ¿Cómo explicaría este concepto a un estudiante?

3. ¿Qué es el modelo o regla de Laplace?

4. ¿Qué es la Ley de los grandes números? ¿Cómo explicaría este fenómeno a un estudiante?

Ítem 2: ¿Cuál secuencia piensa usted que es aleatoria? ¿Por qué?

Ítem 5: Respecto al lanzamiento de dos monedas, ¿los eventos **cara – cara**, **sello – sello** y **sello – cara** (mezclado) tienen la misma probabilidad de ocurrir? ¿Por qué?

Ítem 7: En cuatro lanzamientos sucesivos de una moneda, sale cara cada vez. Si la moneda se lanza una quinta vez, ¿qué es más probable que salga: cara o sello? ¿Por qué?

Ítem 10: ¿Cuál es su estrategia para resolver este problema? ¿A qué resultado llega?

Ítem 13: ¿Comprende este problema? ¿Cómo lo resuelve?

Ítem 15: ¿Cómo resuelve este problema? ¿Cuál es la respuesta?

Ítem 17: En los esquemas presentados, ¿existe alguno en el que haya más posibilidades de realizar el trayecto pedido? ¿Por qué?

Ítem 19A: ¿Cómo resuelve este problema?

Ítem 20: ¿Cómo resuelve este problema? ¿Cuál es la diferencia en el resultado al señalar “con reposición” o “sin reposición”?

Ítem 22: ¿Cómo resolvió este problema?

Ítem 24: ¿Pudo resolver este problema? ¿Qué dificultades existieron?

Ítemes 26, 27 y 28: ¿Qué significado tiene para usted la probabilidad condicional? ¿Cómo resuelve este tipo de problemas? ¿Cómo enseñaría esto a los estudiantes de básica?

ANEXO 6: PAUTA DE ENTREVISTA PARA PROFESORES (E. MEDIA)

09 de septiembre de 2010

NOMBRE: ___________________________________

SECCIÓN A

A continuación se plantean algunas preguntas en relación a la enseñanza y aprendizaje de las nociones de azar y probabilidades para estudiantes de enseñanza básica.

1. ¿Cree usted que los estudiantes de básica pueden aprender estas nociones o contenidos? ¿Desde qué nivel?

2. ¿Qué dificultades considera usted que los estudiantes pueden tener al participar en actividades relacionadas con estos temas?

3. ¿Qué tipo de estrategias utilizaría usted para enseñar las nociones de azar y probabilidad a estudiantes de segundo ciclo básico y media?

4. ¿Cómo considera estos tópicos en relación con otros ejes o áreas del currículo en matemática, de igual relevancia o no? ¿Por qué?

5. ¿Qué le parece que el nuevo marco curricular chileno, ya vigente por cierto, contemple un eje de datos y azar (estadística y probabilidades) en un continuo desde 1° básico a 4° medio?

6. ¿Qué tipo de recursos o materiales son necesarios para enseñar adecuadamente las nociones de azar y probabilidad?

7. Acorde a su formación matemática, ¿cuán preparado se siente usted para enseñar los contenidos del eje de Datos y Azar, particularmente, respecto al azar y las probabilidades?

8. ¿Cree que hay suficiente información y apoyos accesibles para llevar a cabo los requerimientos curriculares del eje de Datos y Azar y, particularmente, respecto a la enseñanza del azar y las probabilidades?

SECCIÓN B

Las siguientes preguntas tienen que ver con el **CUADERNILLO** trabajado en el taller**.**

1. ¿Cómo encontró los problemas propuestos: fáciles, difíciles o de mediana dificultad?

2. ¿Qué es para usted el concepto de aleatorio? ¿Qué es el azar? ¿Cómo explicaría estos conceptos a un estudiante?

3. ¿Qué significa para usted el término probabilidad? ¿Cómo relaciona este concepto con "aleatorio"? ¿Cómo lo relaciona con "frecuencia relativa"?

4. ¿Cómo explicaría el concepto de probabilidad a un estudiante?

5. En la sesión N° 1, se escuchó el siguiente comentario: "*Por ejemplo, obtener 7 al lanzar dos dados con dados no cargados yo saqué la probabilidad y es 1,6 o 1,7 aproximadamente…*" ¿Qué piensa al respecto?

6. ¿Qué significado tienen para usted los siguientes términos: probabilidad teórica, probabilidad experimental, probabilidad subjetiva y probabilidad axiomática?

7. ¿Qué es el modelo o regla de Laplace? ¿Siempre se puede aplicar?

8. ¿Qué es la Ley de los grandes números? ¿Cómo explicaría este fenómeno a un alumno?

Ítem 8: ¿Cuál es su opción? ¿Cómo lo resolvió?

Ítem 13: ¿Comprendió este problema? ¿Cómo lo resolvió?

Ítem 15: ¿Cómo resolvió este problema?

Ítem 17: En los esquemas presentados, ¿existe alguno en el que haya más posibilidades de realizar el trayecto pedido? ¿Por qué?

Ítem 22: ¿Cuál fue su razonamiento para llegar al resultado?

Ítem 24: ¿Pudo resolver este problema? ¿Qué dificultades existieron?

Ítem 25: ¿Cómo resolvería este problema?

Ítemes 26, 27 y 28: ¿Qué significado tiene para usted la probabilidad condicional? ¿Cómo resuelve este tipo de problemas? ¿Cómo enseñaría esto a los estudiantes de básica y media?