INTRODUCCION A LA LOGICA *

Renato Lewin
Pontificia Universidad Católica de Chile

I Parte – LOGICA PROPOSICIONAL

Introducción

1 Lógica

Cuando deseamos establecer una verdad, cuando queremos convencer a alguien de que nuestra posición o nuestras ideas son las correctas, recurrimos a un razonamiento o presentamos evidencia que respalda nuestras opiniones. Este razonamiento o evidencia presentada con el propósito de demostrar algo es un argumento. Por supuesto hay buenos y malos argumentos, en términos muy vagos, la lógica es la ciencia que trata de distinguir los buenos argumentos de los malos argumentos.

La vaguedad de la definición anterior estriba en que no hemos dicho qué entendemos por "buen argumento" o "mal argumento", de hecho, ni siquiera hemos dicho en forma precisa qué es un argumento.

Un *argumento* es un conjunto de una o más oraciones. La última de ellas se denomina *conclusión*, las anteriores se llaman *premisas*.

Intuitivamente, las premisas son la evidencia o razones que nos deben convencer de la veracidad de la conclusión. El argumento es la concatenación de las primeras con la última.

---

*Estas Notas han sido preparadas para los cursos de Lógica dictados para las Licenciaturas en Sociología y en Filosofía de la Pontificia Universidad Católica de Chile.

Es habitual representar los argumentos haciendo un listado de las premisas y la conclusión, separando la última mediante una línea.

$$\left.\begin{array}{c}\text{Oración}\ \ 1\\ \text{Oración}\ \ 2\\ \vdots\\ \hline \text{Conclusión}\end{array}\right\}\ \text{Premisas}$$

¿Qué caracteriza a un "buen" argumento? No se trata aquí de definir argumentos convincentes en el sentido de la retórica, sino aquellos que garanticen que sus conclusiones deben ser aceptadas cuando todas las premisas han sido aceptadas.

Un argumento es *correcto* si en toda situación en la que sus premisas son verdaderas, su conclusión también lo es. En otras palabras, un argumento es correcto si no puede producir una conclusión falsa a partir de premisas verdaderas. Si $\dfrac{\Gamma}{\varphi}$, es un argumento correcto, decimos que φ es *consecuencia lógica de* Γ.

Ni las premisas ni la conclusión tienen que ser verdaderas para que el argumento sea correcto. Es sólo que *si* las premisas son verdaderas, también debe serlo la conclusión. Se puede por lo tanto tener conclusiones falsas usando argumentos correctísimos.

La lógica es el estudio de los argumentos correctos.

Ejemplos:

1. $$\begin{array}{l}\text{Todos los hombres son mortales.}\\ \text{Sócrates es hombre.}\\ \hline \text{Luego Sócrates es mortal.}\end{array}$$

2. $$\begin{array}{l}\text{Si Sócrates es hombre, entonces Sócrates es mortal.}\\ \text{Sócrates es hombre.}\\ \hline \text{Luego Sócrates es mortal.}\end{array}$$

3.
Juan irá al cine o dormirá.
Juan irá al cine.
———
Luego Juan no dormirá.

4.
Algunos hombres son mortales.
Algunos mortales son mamíferos.
———
Luego algunos hombres son mamíferos.

5.
———
Tú ya no me quieres como antes.

6.
———
Somos o no somos.

7.
Ese perro ladra.
Ese perro no ladra.
———
Luego algunos hombres son mamíferos.

Los ejemplos 5 y 6 son un caso extremo de argumento en el que no hay premisas, sólo conclusión. Los ejemplos 1, 2, 6 y 7 son argumentos correctos. El 6 es correcto simplemente porque su conclusión no puede ser falsa. De hecho, podemos agregar todas las premisas que queramos y el argumento seguirá siendo correcto. El último es correcto porque no es posible que las dos premisas sean verdaderas. Los ejemplos 1 y 2 los analizaremos más adelante.

La evidencia presentada por las premisas no es suficiente para afirmar la conclusión de los argumentos 3, 4 y 5. El argumento 3 es incorrecto porque obviamente Juan podría ir al cine y dormir allí. Para 4, si reemplazamos la palabra "mamífero" por "cuadrúpedo", vemos que el argumento obtenido es "el mismo" (ya volveremos sobre esto en la próxima sección), si acepto uno como correcto, el otro también debe serlo. Sin embargo las premisas de la segunda versión son verdaderas y la conclusión falsa. Debemos desechar este argumento por incorrecto. No es necesario hacer notar que 5 no es un argumento correcto, sin embargo, es uno de los más usados en la vida cotidiana.

1.1 Estructura Lógica de los Argumentos

Intuitivamente, la corrección de un argumento depende más de la forma en que se relacionan las oraciones que los componen que del tema del que se está hablando, de tal manera que si alguien no conoce el significado de una palabra, igual debe poder determinar la corrección del argumento. Por ejemplo,

8. Todas las flores son rojas.
Esta margarita es una flor.
———————————————
Luego esta margarita es roja.

es el "mismo" argumento que 1. en el sentido de tener la misma forma o *estructura lógica*. Si aceptamos la corrección del primero, debemos aceptar la del segundo, obsérvese sin embargo, que en este caso la conclusión es falsa.

De alguna manera, el contenido de lo que se dice más bien oculta que esclarece esta estructura. Por ejemplo, consideremos

9. Todos los flum son pran.
Frafrá es un flum.
———————————————
Luego Frafrá es un pran.

Este es el mismo argumento que 1 y que 8 a pesar de que no sabemos sobre qué se está hablando. Demos un paso más y usemos sólo variables:

10. Todos los A son B.
c es un A.
———————————————
Luego c es un B.

El último paso es escribir estas oraciones en el lenguaje de primer orden que aprendimos en algún curso de Algebra o Matemática Discreta. [1]

11.
$$\begin{array}{l} \forall x(A(x) \rightarrow B(x)\,) \\ A(c) \\ \hline B(c) \end{array}$$

[1] El lector que no haya estudiado estos temas puede hacer caso omiso de esta observación y seguir adelante, donde sí lo estudiaremos.

La introducción de lenguajes más y más formales son una necesidad para obtener el esqueleto del argumento. Representan distintos grados de abstracción que nos permiten también eliminar las ambigüedades de los lenguajes naturales.

En el caso de nuestro ejemplo 1 (y por lo tanto también 8, 9, 10, y 11) visto como equivalente al argumento 11, podemos aplicar una sencilla herramienta matemática, los diagramas de Venn, (¡probablemente aprendidos en la unidad de Teoría de Conjuntos!), para verificar que se trata de un argumento correcto. Dado un universo $\mathcal{U}$, la primera premisa nos dice que el conjunto de los objetos de $\mathcal{U}$ determinado por el predicado $A(x)$ es un subconjunto de aquel determinado por el predicado $B(x)$. La segunda premisa nos dice que el objeto denotado por c pertenece al primero de estos conjuntos, luego debe pertenecer al segundo, que es lo que afirma la conclusión. Por lo tanto el argumento es correcto, ya que esos conjuntos son abstracciones de todas las posibles situaciones en las que queremos evaluar la verdad o falsedad de las oraciones involucradas.

Podemos incluso escribirlo en la terminología de los conjuntos.

12. $$\begin{array}{c} A \subseteq B \\ c \in A \\ \hline c \in B \end{array}$$

El caso del argumento 2 es distinto. Formalizándolo dentro del lenguaje visto en el curso Matemática Discreta se traduce en el argumento conocido como Modus Ponens (M.P.).

13. $$\begin{array}{l} (p \rightarrow q) \\ p \\ \hline q \end{array}$$

La corrección de este argumento puede considerarse como la definición de lo que en lógica clásica se entiende por implicación. Si es cierto que una oración p implica a otra q y que la primera es verdadera, entonces la segunda también debe serlo. Obsérvese que nada se dice si la primera oración es falsa, no interesa.

Los argumentos 1 y 2 son correctos por motivos muy distintos. En el primero, se habla de objetos de un cierto contexto o universo del discurso, con ciertas propiedades (ser hombre, ser mortal, ser flor, ser roja, ser flum y ser pran, todas ellas simbolizadas por $A(x)$ o por $B(x)$). La corrección del argumento se debe a cómo están relacionadas entre sí esos objetos y sus propiedades. En el segundo ejemplo, se relacionan oraciones por medio de conectivos lógicos, la corrección del argumento se debe a la particular estructura de los conectivos que aparecen en esas oraciones y reflejan lo que entendemos por ellos. Son la consecuencia directa de cómo los definimos y su significado está dado, o más bien resumido, en las tablas de verdad.

Los primeros corresponden a la lógica de predicados o lógica de primer orden, los segundos a la lógica proposicional. En estos apuntes estudiaremos primero la lógica proposicional, vale decir, el estudio de la estructura de conectivos de los argumentos, luego estudiaremos la lógica de predicados.

1.2 Acerca de oraciones y proposiciones.

Hemos dicho que los argumentos son conjuntos de oraciones, debemos decir un par de palabras sobre qué entenderemos por "oración" en este contexto.

Existen innumerables dificultades para clarificar cuales son los elementos lingüísticos mínimos, los "ladrillos" con los que se construye un argumento. Dado que nos interesa distinguir las ideas verdaderas de las falsas y dado que éstas se materializan a través de oraciones, nos interesaremos solamente por aquellas expresiones gramaticales para las que tenga sentido preguntarse si son verdaderas o falsas. Llamaremos *oraciones* a este tipo de expresión.

Tradicionalmente los filósofos han distinguido entre "proposición" y "oración". En términos muy generales, las proposiciones son el significado de una oración (o conjunto de oraciones), lo que "queremos decir" cuando enunciamos una oración o frase dada. Así, las tres oraciones

> Todos los hombres son mortales.
> Los humanos son mortales.
> All men are mortal.

corresponden a una misma proposición.

Los argumentos, dicen, son concatenaciones de ideas que nos permiten sacar conclusiones. No son las expresiones lingüísticas, las oraciones, las que están en juego, sino sus significados, los conceptos e ideas detrás de esas materializaciones. Por ejemplo, conocimientos rudimentarios del inglés nos indicarán que

14.

All men are mortal.
Socrates is a man.

Therefore Socrates is mortal.

es el mismo argumento del ejemplo 1.

Mucho se ha escrito sobre la relación oración–proposición, lo suficiente para que estos conceptos no estén en absoluto claros[2]. Se trata de un tema difícil y que no abordaremos en este curso, preferiremos dejarlo en el plano intuitivo.

Un buen método para determinar si una expresión X es una oración o no, es preguntarse

¿Es verdad que X?

Si esta pregunta no tiene sentido, entonces X no es una oración. Por ejemplo

¡Salga inmediatamente de esta habitación!

no es una oración ya que la pregunta

¿Es verdad que salga inmediatamente de esta habitación?

carece de sentido.

Lo anterior no quiere decir que debamos ser capaces de determinar si X es verdadera o falsa. Tiene sentido preguntarse

¿Es verdad que existe vida en Andrómeda?

aunque no sepamos ni podamos determinar si hay vida en Andrómeda.

Hay otro tipo de expresiones gramaticales que, si bien aprobarían nuestro criterio, no consideramos apropiadas. Por ejemplo

[2] Además de proposiciones distintos autores emplean términos como sentencias, juicios, afirmaciones, etc., lo que ayuda a la confusión.

Heriberto sabe que María lo ama.
Es obvio que $1 + 1 = 2$.
Pedro cree que Dios es uno y trino.

El siguiente ejemplo ilustra el tipo de dificultades que entraña este tipo de expresión.

5. Aldo sabe que el asesino de Juan huye herido.
   <u>Pedro Fernández es el asesino de Juan</u>.
   Luego, Aldo sabe que Pedro Fernández huye herido.

Estas oraciones en contextos sesgados no son susceptibles del tratamiento que se dará en este texto.

1.3 Consistencia Lógica

Otro concepto de gran interés y que está estrechamente relacionado con el de argumento correcto, es el de *consistencia lógica* o de *conjunto consistente de oraciones*. De hecho algunos autores prefieren definir la lógica como el estudio de este concepto.

Diremos que un conjunto de oraciones es *consistente* si existe una situación en la cual todas ellas son verdaderas. Si este no es el caso, el conjunto se dice inconsistente. Por ejemplo

Hace frío.
Llueve.
Debo ir a clases y no hace frío.

Es inconsistente, no existe posibilidad de que la primera y la tercera oraciones sean ambas verdaderas. En cambio

El médico me ha recetado antibióticos tres veces el año pasado.
De hecho, fui hospitalizado dos veces en ese período.
Pero yo tengo muy buena salud.

es consistente ya que existe la posibilidad de que sean todas ciertas. (Por ejemplo, el individuo de buena salud se vió expuesto a una infección en su trabajo).

Existe una estrecha relación entre argumento correcto y conjunto consistente de oraciones. Esta se establece de la siguiente manera. Dado un argumento, el conjunto formado por las premisas y la negación de la conclusión se llama su *conjunto contraejemplo.*

Teorema 1. *Un argumento es correcto si y solamente si su conjunto contraejemplo es inconsistente.*

Demostración. En efecto, supongamos que el argumento

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline C \end{array}$$

es correcto.

Si el conjunto contraejemplo $P_1, \ldots, P_n$ y no–C fuera consistente se daría un caso en el que todas las premisas del argumento son verdaderas pero la conclusión C es falsa (ya que "no–C" es verdadera). Pero tal situación contradice la definición de argumento correcto, no puede ser, por lo tanto, el conjunto contraejemplo debe ser inconsistente.

Por otra parte, supongamos que el conjunto contraejemplo es inconsistente. Para verificar si el argumento es correcto o incorrecto, estudiamos el caso en que las premisas son verdaderas. ¿Qué sucede con la conclusión? Si ésta fuera falsa, entonces su negación sería verdadera y por lo tanto, el conjunto contraejemplo sería consistente, en contra de lo que supusimos. Luego, la conclusión C debe ser verdadera y el argumento es correcto. □

Más adelante desarrollaremos un método basado en este Teorema para verificar si un argumento es correcto.

1.4 La Lógica y las *Lógicas*

¿Hay argumentos que son correctos en un contexto pero no en otro?, en otras palabras, ¿Existe una única lógica o hay lógicas alternativas? En un sentido bastante trivial, hemos visto que hay argumentos como el Ejemplo 1, que es correcto en el contexto de la lógica de predicados pero no lo es dentro de la lógica proposicional. En este caso, debemos contar con un lenguaje que nos permita expresar la estructura del argumento y el lenguaje del cálculo proposicional clásico es insuficiente para ello. Podemos pensar en otras lógicas, obtenidas de la Lógica Proposicional Clásica, (en adelante LC), ampliando el lenguaje, no ya con cuantificadores y símbolos de predicado, etc., sino con otros conectivos.

Un ejemplo bastante conocido es el de las *lógicas modales*. Estas se obtienen considerando para cada oración φ una nueva oración $\Box\varphi$, cuya interpretación es "*φ es necesariamente verdadera*". Es razonable pensar que en esta lógica, por ejemplo, $\dfrac{\Box\varphi}{\varphi}$, debe ser un argumento correcto: si suponemos que una oración es necesariamente verdadera, entonces ella debe ser verdadera. Podemos pensar en otros conectivos, los que en principio, darán origen a otras lógicas. (Obsérvese que no es del todo claro que la lógica modal recién insinuada sea distinta de la LC, bien podría ser que el nuevo conectivo se pudiera definir dentro del lenguaje de la LC y luego probar sus propiedades dentro de esa lógica).

Las lógicas así obtenidas son extensiones más o menos naturales de la LC. Sin embargo hay otras cuyas diferencias con ésta las convierten en lógicas alternativas o *no–estándar.* Hay algunas que se obtienen dando una interpretación distinta de la usual a los conectivos. Por ejemplo, el condicional "si φ, entonces ψ" tiene en la LC una interpretación *material*, (todos los conectivos la tienen), es decir, su valor de verdad depende funcionalmente de los valores de verdad de φ y de ψ, y no de otras consideraciones. Esto es muy insatisfactorio fuera del contexto de la matemática, por ejemplo, nos vemos obligados a aceptar que la oración: "Si $2 + 2 = 5$, entonces el cielo es azul", es verdadera, ya que su antecedente es falso. El sentido común nos dirá que esta oración no es ni verdadera ni falsa, sino más bien, un sinsentido. Han sido propuestas varias lógicas en las que, para afirmar el condicional, se exige no los meros valores de verdad del antecedente y del consecuente, sino cierta relación entre ellos. Algunas de éstas reciben el nombre de lógicas *relevantes*. Algo similar sucede con distintas interpretaciones de la negación.

Hay otras lógicas en las que se cambia los posibles significados de las oraciones ampliando el espectro de valores de verdad que éstas pueden tomar, es decir, además de verdadero y falso, puede haber uno o más valores "intermedios", por ejemplo "indeterminado". Esto da origen a lógicas llamadas *multi–valuadas*.

Otro caso interesante del que nos ocuparemos en la última sesión es el de las lógicas paraconsistentes, aquellas que permiten la existencia de contradicciones sin que se trivialice el sistema.

Sin intentar agotar la gama de posibles lógicas distintas de la LC, vemos que hay muchas alternativas. Esto nos indica que para comprender la Lógica se debe estudiar diversas lógicas.

1.5 Lógica Matemática

Determinar si una oración φ es consecuencia lógica de un conjunto Γ de oraciones es prácticamente imposible: tendríamos que ser capaces de verificar si la conclusión del argumento es verdadera en todas las instancias (o interpretaciones posibles de las palabras que componen el argumento) en las que las premisas son verdaderas.

Como dijimos más arriba, el estudiante avispado nota que en sus estudios de lógica surge naturalmente una suerte de álgebra, o manipulación simbólica. Vimos también cómo puede usarse los diagramas de Venn para demostrar la corrección de cierto tipo de argumentos. Por otra parte, hicimos notar que la relación de consecuencia lógica depende de la estructura sintáctica de las oraciones que componen un argumento y no de su significado. Resulta natural entonces pensar que se puede estudiar este concepto usando herramientas matemáticas. La *lógica matemática* no es un tipo de lógica como los mencionados más arriba, sino la disciplina que (entre otras cosas) desarrolla modelos matemáticos del concepto de consecuencia lógica, cualquiera sea la lógica involucrada.

2 La Lógica Proposicional

Los argumentos correctos lo son en virtud de su "estructura lógica", en este capítulo desarrollaremos métodos para poner de manifiesto esta estructura y verificar la corrección o incorrección de los argumentos. Para hacer esto, el primer paso es introducir un lenguaje formalizado. Este lenguaje formalizado no es capaz de expresar sino una pequeña parte del castellano, la idea es captar la estructura de "conectivos lógicos" de las oraciones. Su gran ventaja es que es un lenguaje en el que se han eliminado todas las ambiguedades, cada oración puede leerse de una sola manera.

2.1 El lenguaje $\mathcal{L}$

$\mathcal{L}$ está formado por los siguientes símbolos:

1. Letras proposicionales: $p, q, r, \ldots$

   También letras con subíndice $p_1, p_2, p_3, \ldots$ si necesitáramos muchas.

2. Conectivos lógicos: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

3. Paréntesis: (y).

Los símbolos anteriores conforman el alfabeto de $\mathcal{L}$, las expresiones de $\mathcal{L}$ serán cadenas (finitas) de estos símbolos.

Una *oración* de $\mathcal{L}$ [3] es una expresión construida mediante la aplicación de una de las reglas siguientes:

(1) Toda letra proposicional es una oración.

(2) Si φ es una oración, $\neg\varphi$ también lo es.

(3) Si φ y ψ son dos oraciones, entonces $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ también lo son.

[3] Algunos autores prefieren llamar fórmulas bien formadas, o simplemente fórmulas a las oraciones de $\mathcal{L}$.

(4) Sólo las expresiones construidas según las reglas (1), (2) y (3) son oraciones de $\mathcal{L}$.

La misma definición de oración nos proporciona un método que nos permite determinar si una expresión dada es o no una oración de $\mathcal{L}$. Consideremos la expresión

$$\theta : ((p \to \neg q) \vee r)$$

Como no es una letra proposicional y no comienza con el símbolo "$\neg$", si θ es una oración debe haber sido construida aplicando la regla (3), por ejemplo, a

$$\varphi : (p \to \neg q) \quad \text{y} \quad \psi : r$$

La segunda es una oración de $\mathcal{L}$ por la regla (1). La primera será oración si p y $\neg q$ son oraciones. Ambas son oraciones en virtud de las reglas (1) y (2) respectivamente.

Podemos de esta manera construir un árbol en el que cada nodo contiene una expresión de $\mathcal{L}$ y las ramas se construyen aplicando las reglas anteriores:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & ((p \to \neg q) \vee r) & \\
 & & \diagup & & \diagdown \\
 & (p \to \neg q) & & & r \\
\diagup & & \diagdown & & \\
p & & \neg q & & \\
 & & | & & \\
 & & q & &
\end{array}$$

Si todas las ramas terminan en una letra proposicional, la expresión original se puede obtener a partir de ellas aplicando las reglas, luego es una oración de $\mathcal{L}$.

Por ejemplo

$$\begin{array}{ccc}
 & (p \to \neg(q \vee r) & \\
\diagup & & \diagdown \\
p & & \neg(q \vee r \\
 & & | \\
 & & (q \vee r
\end{array}$$

no es una oración ya que la rama de la derecha no termina en una letra proposicional.

El lenguaje $\mathcal{L}$ es un intento de formalizar un pequeño fragmento del castellano (u otro lenguaje natural), a saber, su estructura de conectivos. Veremos a continuación la interpretación intuitiva de cada uno de los símbolos del alfabeto de $\mathcal{L}$.

Las Letras proposicionales

Las letras proposicionales representan oraciones elementales como "Llueve", "Sócrates es mortal", "Todos los gatos son negros", etc.

Los conectivos lógicos pretenden representar los conectivos del castellano como sigue.

La Negación:

La oración $\neg\varphi$ representa la *negación* de φ. En un primer análisis elemental, no hay dificultades entre el sentido formal y el sentido intuitivo del castellano de este conectivo, la única dificultad es, quizás, que la negación en castellano no siempre va al comienzo de la oración y debe buscarse dentro de ella. Por ejemplo:

φ : Federico no sabe.
$\neg\varphi$: Federico sabe.

Debe hacerse notar, que la negación y la implicación son los conectivos más complejos y sutiles de la lógica. La mayoría de las lógicas no–clásicas difieren de ésta en el significado que se da a estos dos conectivos.

La Conjunción:

La oración $(\varphi \wedge \psi)$ representa la *conjunción* de las oraciones φ y ψ. Se lee "φ y ψ". Tampoco hay grandes diferencias en el castellano y su formalización. Deben notarse si un par de problemas.

En primer lugar, si bien

Juan y Carolina cantan bien

puede formalizarse por

("Juan canta bien" $\wedge$ "Carolina canta bien")

la oración muy similar

Juan y Carolina son casados

no debe formalizarse por

("Juan es casado" $\wedge$ "Carolina es casada")

ya que la primera de ellas implica que Juan y Carolina son casados entre si y la segunda no lo implica. El problema radica en la ambiguedad de la oración.

Otra dificultad es que en castellano, a veces, la conjunción y implica secuencia temporal. Por ejemplo

Iré a la cama y dormiré

no es lo mismo que

Dormiré e iré a la cama.

Este sentido se pierde en la formalización.

La Disyunción:

La oración $(\varphi \vee \psi)$ representa la *disyunción* de φ y ψ. Se lee "φ o ψ". La diferencia más notable entre el castellano y su formalización es que habitualmente la disyunción en castellano tiene sentido exclusivo, es decir, si afirmamos φ o ψ, no pueden ambas oraciones φ y ψ ser verdaderas. En el lenguaje $\mathcal{L}$, $(\varphi \vee \psi)$ será verdadera cuando una o ambas oraciones lo son.

La Implicación:

La oración $(\varphi \to \psi)$ se llama la *implicación* entre φ y ψ. Intenta representar el conectivo castellano "si ..., entonces ..." Sin embargo, hay diferencias importantes entre ambos. Este conectivo lo usamos en su sentido "material" (todos los conectivos de $\mathcal{L}$ lo son), esto es, la verdad o falsedad de $(\varphi \to \psi)$ depende exclusivamente de la verdad o falsedad de φ y de ψ y de ninguna otra consideración. Debemos notar que en castellano, si ..., entonces ... no se usa en un sentido material y el hacerlo acarrea ciertas complicaciones. La principal de ella es que resulta intuitivamente molesto que

Si $2 + 2 = 5$, entonces el cielo es azul.

sea una oración verdadera. De alguna manera nuestra intuición nos dice que esa oración no sólo no es verdadera sino que carece de sentido.

Como mencionamos antes, algunos lógicos no contentos con esto han desarrollado lógicas alternativas que intentan captar la relación intuitiva que debe existir entre el antecedente y el consecuente de una implicación.

El Bicondicional:

La oración $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ se llama la *equivalencia* entre φ y ψ. Representa al conectivo castellano si y solamente si. Las mismas objeciones para el condicional se pueden hacer para el bicondicional.

2.2 Semántica para $\mathcal{L}$

Nos queda todavía un aspecto de $\mathcal{L}$ por analizar, este es, su semántica. La interpretación o significado de una oración de $\mathcal{L}$ es su *valor de verdad*, vale decir, si es verdadera o falsa.

Una *valuación* para $\mathcal{L}$ consiste en asignar a cada letra proposicional un valor de verdad. Simbolizaremos éstos con las letras V, por verdadero y F, por falso.

El valor de verdad de una fórmula compuesta está determinado por el valor de verdad de las letras proposicionales que en ella intervienen. Naturalmente, como en cada oración aparece sólo un número finito de letras proposicionales las posibles combinaciones de valores de verdad son finitas. Vale decir, hay un número finito de valuaciones distintas que interesan en cada uso particular, luego se pueden describir todas. Es fácil ver que para una fórmula con n letras proposicionales habrá 2^n valuaciones posibles.

La determinación de valores de verdad para fórmulas complejas a partir de las distintas valuaciones se organiza a través de las llamadas tablas de verdad. Estas son como sigue:

2.3 Tablas de Verdad

p	¬p
V	F
F	V

p	q	(p ∨ q)	(p ∧ q)	(p → q)	(p↔ q)
V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	F
F	F	F	F	V	V

Nótese que cada línea de la tabla contiene una posible valuación y que no hay más valuaciones posibles.

A partir de estas cinco tablas básicas podemos construir tablas para oraciones más complicadas. Por ejemplo:

p	q	$((p \to q)$	$\leftrightarrow$	$(\neg q \vee \neg p))$
V	V	V	F	F
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

o bien

p	q	r	$((p \rightarrow (q \vee r))$		$\vee$	$((q \vee r) \rightarrow p))$	
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	F	V	F
F	V	F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F	V	F
F	F	F	V	F	V	F	V

Las tablas de verdad pueden ser usadas para varios fines, para determinar si un argumento es correcto o no, si un conjunto de oraciones es consistente o no, etc.

2.3.1 Tautologías

Consideremos la oración

$$(p \rightarrow (q \rightarrow p)).$$

Su tabla de verdad será:

p	q	$(p \rightarrow$	$(q \rightarrow p))$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	V	V	V

Vemos que para toda valuación, o sea, en toda circunstancia, esta oración es verdadera. Resulta claro que tal tipo de oración debe interesarnos. Llamamos *tautología* a una oración de $\mathcal{L}$ que es siempre verdadera. Las tablas de verdad nos permiten determinar si una oración es o no una tautología.

2.3.2 Consecuencia Tautológica

¿Cómo usaremos el método para determinar si un argumento es correcto? Simplemente aplicamos la definición. Primero determinamos bajo qué valuaciones son todas las premisas verdaderas. En seguida verificamos para cada una de ellas (y sólo éstas) si la conclusión es verdadera o falsa. Si para todas la conclusión es verdadera, el argumento es correcto. En cambio si hay una valuación para la cual todas las premisas son verdaderas pero la conclusión es falsa, entonces el argumento es incorrecto. Veamos un ejemplo. Consideremos el argumento

$$\begin{array}{c} (p \to q) \\ \underline{(p \vee q)} \\ q \end{array}$$

y apliquemos el método

p	q	$(p \to q)$	$(p \vee q)$	q
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F

Sólo nos interesa la primera y tercera líneas ya que en las otras una de las premisas es falsa. Vemos que tanto en la primera como en la tercera líneas la conclusión es verdadera, podemos concluir que el argumento es correcto.

La relación que se establece entre las premisas $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ y la conclusión ψ de un argumento correcto se denomina *consecuencia tautológica* y la denotamos $\Gamma \models \psi$. También decimos que ψ es consecuencia tautológica de Γ.

Obviamente, la noción de consecuencia tautológica no es sino la versión formalizada en $\mathcal{L}$ de la noción de argumento correcto.

Lema 1. *La relación de consecuencia tautológica verifica:*

1. $\Delta \models \varphi$ *, para todo* $\varphi \in \Delta$.
2. *Si* $\Delta \models \psi$ *y* $\Delta \subseteq \Gamma$*, entonces* $\Gamma \models \psi$.
3. *Si* $\Delta \models \psi$ *y* $\Gamma \models \varphi$*, para todo* $\varphi \in \Delta$*, entonces* $\Gamma \models \psi$.

2.3.3 Consistencia Lógica en $\mathcal{L}$: Conjuntos Satisfactibles

Resulta obvio también cómo usar tablas de verdad para determinar si un conjunto de oraciones es logicamente consistente o no ya que debemos determinar si existe una situación, en este contexto, si existe una valuación, que haga a todas sus oraciones verdaderas. Como cada línea de la tabla representa una valuación, basta verificar si alguna línea contiene sólo V. Diremos que un conjunto de oraciones es *satisfactible* si existe una valuación que asigna el valor a todas las oraciones de Γ.

Por ejemplo el conjunto formado por:

$$\{(p \wedge q) \quad , \quad (\neg p \vee q) \quad , \quad (q \rightarrow \neg p)\}$$

no es consistente como lo demuestra la tabla siguiente:

p	q	$(p \wedge q)$	$(\neg p \vee q)$	$(q \rightarrow \neg p)$
V	V	V	V	F
V	F	F	F	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

ninguna línea contiene sólo V, vale decir, no pueden ser todas verdaderas al mismo tiempo. En cambio el conjunto

$$\{(p \leftrightarrow q), \quad (\neg p \vee q), \quad (q \rightarrow p)\}$$

es satisfactible como lo muestran la primera (o la cuarta) línea de la tabla siguiente:

p	q	$(p \leftrightarrow q)$	$(\neg p \vee q)$	$(q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	V	F
F	F	V	V	V

Existe otra manera de entender los argumentos y de demostrar su corrección. Veámoslo en su versión formalizada en $\mathcal{L}$.

Teorema 2.

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi$$

si y solamente si la oración

$$((\ldots(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to \psi) \qquad (*)$$

es una tautología.

Demostración. En efecto, supongamos que el ψ es consecuencia tautológica de las oraciones $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. ¿Puede la oración (*) ser falsa? La única posibilidad es que el antecedente $(\ldots(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$ sea verdadero y el consecuente ψ sea falso. Pero si el antecedente es verdadero, por ser una conjunción, todas las oraciones φ_i son verdaderas, vale decir, las premisas son verdaderas, luego la conclusión ψ es verdadera. Es decir, (*) no puede ser falsa, o sea, es una tautología.

A la inversa, si suponemos que (*) es una tautología. Veamos que sucede si todas las oraciones $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ son verdaderas. Entonces el antecedente de (*) es verdadero, luego también lo es su consecuente, o sea, ψ es verdadero. Por lo tanto, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi$. □

2.4 Importancia y limitaciones del método de la tablas de verdad

El método de las tablas de verdad tiene dos características de gran importancia teórica. Una de ellas es que el procedimiento es finito (naturalmente esto es suponiendo que el conjunto de oraciones involucrado es finito.) La otra es que es un procedimiento mecánico, no necesitamos entender el significado de las oraciones involucradas. De hecho, ni siquiera es necesario pensar que estamos hablando de la verdad o falsedad de las oraciones, los símbolos V y F bien pueden representar otra cosa, o simplemente nada.

La existencia de un método con esas características es muy importante ya que garantiza que siempre se puede decidir si un argumento formalizado en $\mathcal{L}$ es correcto o no.

Sin embargo, si bien el método resuelve los problemas anteriores completamente en forma teórica, tiene la dificultad de ser de difícil aplicación práctica debido a que es excesivamente largo. En efecto, si el argumento involucra, digamos, 15 oraciones elementales, o sea, 15 letras proposicionales, ¡necesitamos una tabla con 32.768 líneas!

2.5 Arboles de Gentzen

Desarrollaremos un método mecánico para resolver los problemas que nos interesan, este método además de ser más corto que el de las tablas de verdad tiene la ventaja adicional de ser puramente sintáctico: no necesitamos hacer alusión a la verdad o falsedad de las oraciones, sólo haremos manipulaciones algebráicas considerando los símbolos que aparecen el las oraciones. Tiene la ventaja de ser muy elemental y no requerir de entrenamiento matemático previo. Se trata del método de los Arboles de Gentzen.

Dado un conjunto de oraciones A, construiremos a partir de él un árbol mediante la aplicación de algunas reglas bastante sencillas, similares a las usadas para verificar si una oración de $\mathcal{L}$ es o no una oración. Los árboles estarán constituidos por *nodos* unidos por líneas. En cada nodo escribiremos una o más oraciones. Una *rama* del árbol es una sucesión lineal de nodos de éste.

Un *árbol de Gentzen* para el conjunto de oraciones A se construye de la siguiente manera:

- El primer nodo del árbol se llama *raíz* y contiene a A.
- Cada nodo del árbol se puede extender aplicando a alguna oración que está sobre la rama a la que pertenece el nodo, una de las nueve reglas indicadas a continuación .

Reglas de la disyunción

$$\begin{array}{ccc} & (\varphi \vee \psi) & \\ \diagup & & \diagdown \\ \varphi & & \psi \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg(\varphi \vee \psi) \\ | \\ \neg\varphi \\ \neg\psi \end{array}$$

Reglas de la conjunción

$$
\begin{array}{c}
(\varphi \land \psi) \\
| \\
\varphi \\
\psi
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
 & \neg(\varphi \land \psi) & \\
 / & & \backslash \\
\neg\varphi & & \neg\psi
\end{array}
$$

Reglas de la implicación

$$
\begin{array}{ccc}
 & (\varphi \to \psi) & \\
 / & & \backslash \\
\neg\varphi & & \psi
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
\neg(\varphi \to \psi) \\
| \\
\varphi \\
\neg\psi
\end{array}
$$

Reglas del bicondicional

$$
\begin{array}{ccc}
 & (\varphi \leftrightarrow \psi) & \\
 / & & \backslash \\
\varphi & & \neg\varphi \\
\psi & & \neg\psi
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
 & \neg(\varphi \leftrightarrow \psi) & \\
 / & & \backslash \\
\varphi & & \neg\varphi \\
\neg\psi & & \psi
\end{array}
$$

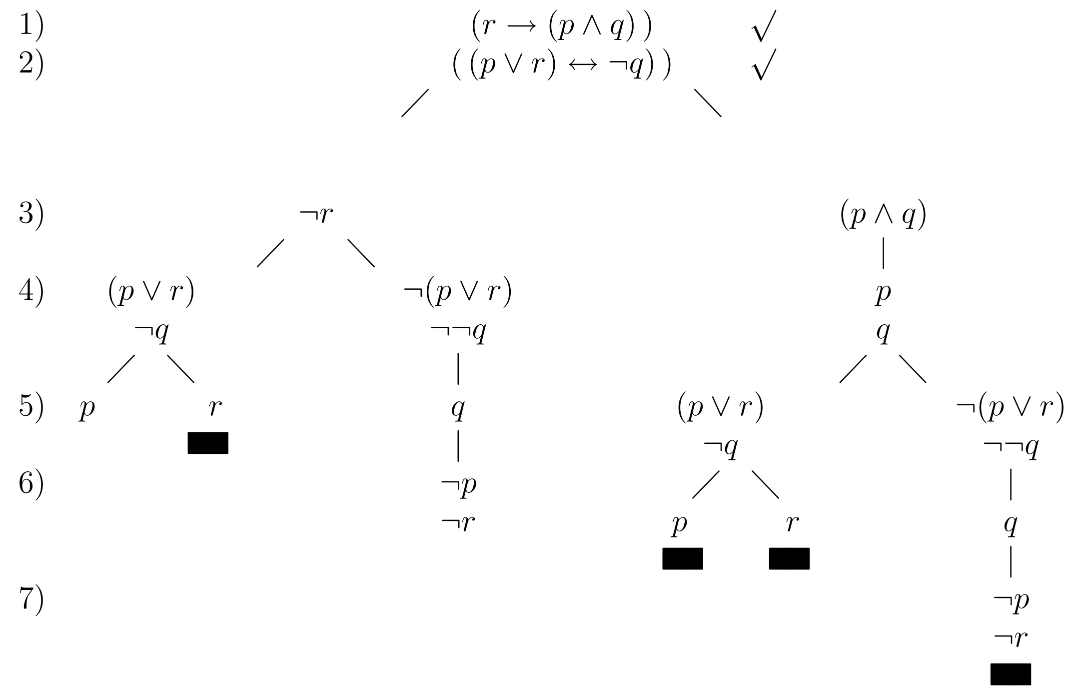
Regla de la doble negación

$$
\begin{array}{c}
\neg\neg\varphi \\
| \\
\varphi
\end{array}
$$

Ejemplo: Hagamos un árbol para el conjunto de oraciones:

$$\{(r \to (p \land q)) \quad , \quad ((p \lor r) \leftrightarrow \neg q)\}$$

Con el propósito de facilitar la lectura enumeraremos las fórmulas. El lector debe verificar qué regla se ha usado en cada línea.



- Una rama se dirá *cerrada* si en ella aparece una oración φ y su negación $\neg\varphi$. Las ramas cerradas serán marcadas con el símbolo $\blacksquare$. Las ramas que no están cerradas se dirán *abiertas*.

- Una oración que aparece en algún nodo del árbol se dirá *descartada* si todas las ramas abiertas a las que pertenece han sido extendidas aplicándole una de las reglas. Las oraciones descartadas serán marcadas con $\surd$, indicando con ello que ya no es necesario volver sobre ellas. (El símbolo $\surd$ no es parte del árbol, sólo una ayuda memoria).

- Diremos que un árbol está *completo* si a todas las oraciones que aparecen en alguna rama abierta han sido descartadas.

Un conjunto de oraciones es *sintácticamente consistente* si tiene un árbol de Gentzen completo y con al menos una rama abierta.

En el ejemplo anterior, las ramas marcadas con $\blacksquare$ están cerradas, las otras están abiertas. El árbol está completo. El conjunto del ejemplo es sintácticamente consistente.

Teorema 3. Teorema de Completud
Un conjunto (finito) de oraciones es sintácticamente consistente si y solamente si es satisfactible.

Demostración. Supongamos primero que un conjunto de oraciones A es sintácticamente consistente. Debemos demostrar que existe una valuación que hace verdaderas a todas sus oraciones. Como el conjunto es sintácticamente consistente, existe un árbol completo con al menos una rama abierta. En esta rama aparecerán algunas fórmulas que son letras proposicionales o sus negaciones (si no es así, el árbol no está completo). Definimos una valuación como sigue. A todas las letras proposicionales que aparecen en la rama abierta les asignamos el valor V y a aquellas que aparecen negadas le asignamos el valor F.

Verifiquemos que esta valuación hace que todas las oraciones de la rama sean verdaderas. Esto es claro para el caso de las oraciones que son letras proposicionales o sus negaciones. Notemos además que toda rama termina en una o dos de éstas, luego el nodo final de la rama abierta considerada contiene oraciones verdaderas. Como el árbol se construyó aplicando alguna de las nueve reglas de construcción, podemos ponernos en todos los casos posibles para verificar que el nodo inmediatamente superior también contiene oraciones verdaderas. Una vez en el segundo nodo aplicamos el mismo proceso y vemos que el tercer nodo también contiene sólo oraciones verdaderas y así sucesivamente, como todas las ramas son finitas, tarde o temprano alcanzaremos la raíz demostrando así que todas las oraciones de A son verdaderas bajo la valuación indicada.

Como el proceso es igual en todos los nodos, podemos describirlo en uno arbitrario suponiendo que ya se ha hecho para todos aquellos nodos que están bajo él. Supongamos que todos los nodos hasta un cierto punto de la rama contienen sólo oraciones verdaderas según esta valuación y que la oración φ está en el nodo siguiente.

Si φ es una letra proposicional o su negación, entonces por hipótesis, ella es verdadera ya que así se definió valuación.

Si $\varphi = \theta \vee \psi$ el árbol se construyó aplicando la regla:

$$\begin{array}{ccccc} & & (\theta \vee \psi) & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ & \theta & & & \psi \\ \nearrow & & & & \\ \text{rama abierta} & & & & \end{array}$$

Como supusimos que la rama está abierta, una de las dos, digamos la indicada en el diagrama anterior, es la rama abierta, o sea, θ es verdadera, y como φ es una disyunción, también debe ser verdadera.

Si $\varphi = \theta \wedge \psi$ la regla aplicada es:

$$\begin{array}{cc} & (\theta \wedge \psi) \\ & | \\ & \theta \\ & \psi \\ \nearrow & \\ \text{rama abierta} & \end{array}$$

Como supusimos que ψ y θ son verdaderas, entonces φ también lo será.

Si la regla aplicada es

Si $\varphi = (\theta \to \psi)$ el árbol se construyó aplicando la regla:

$$\begin{array}{ccccc} & & (\theta \to \psi) & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ & \neg\theta & & & \psi \\ \nearrow & & & & \\ \text{rama abierta} & & & & \end{array}$$

Como $\neg\theta$ es verdadera, φ también lo será. Lo mismo sería cierto si la rama abierta fuera la otra.

El lector podrá verificar que cualquiera sea la estructura de la oración φ, la regla aplicada garantizará que φ será verdadera.

Resumiendo, a partir de una rama abierta de un árbol completo, hemos construido una valuación que hace verdaderas a todas las fórmulas de la rama, en particular a las de la raíz, lo que demuestra que nuestro conjunto es satisfactible.

La demostración del recíproco es muy similar. Supongamos que tenemos un conjunto satisfactible de oraciones A, vale decir, existe una valuación que las hace a todas verdaderas. Construiremos un árbol con raíz A, completo y con al menos una rama abierta. Debemos verificar que cualquiera de las reglas de construcción garantizan que si son aplicadas a una oración verdadera, al menos uno de los nuevos nodos obtenidos debe contener sólo oraciones verdaderas.

Por ejemplo, si extendemos una rama aplicando la regla correspondiente a la oración $(\varphi \to \psi)$, los nuevos nodos serán

$$\begin{array}{ccccc} & & (\varphi \to \psi) & & \\ & / & & \backslash & \\ \neg\varphi & & & & \psi \end{array}$$

Como supusimos que $(\varphi \to \psi)$ es verdadera, al menos uno de los dos nodos contiene (sólo) una oración verdadera. La verificación de todas las otras reglas es similar.

Para contruir un árbol con una rama abierta, basta empezar en la raíz con el conjunto A dado. Una fácil inducción sobre el largo de las ramas nos mostrará que en cada nivel hay una rama con todas sus oraciones verdaderas. Tal rama no puede cerrarse en ese nivel. Si continuamos de esa manera, tendremos una rama completa y abierta. $\square$

En el ejemplo anterior podemos considerar la segunda rama, que está abierta. La valuación sería:

$$q \text{ es } F \text{ y } p \text{ es } V,$$

entonces $\neg(p \wedge q)$, $(p \vee r)$, $((p \vee r) \leftrightarrow \neg q)$ y $((p \wedge q) \to r)$ son todas verdaderas.

Corolario 1. *Si un árbol completo para un conjunto de oraciones tiene todas sus ramas cerradas, cualquier árbol completo tendrá todas sus ramas cerradas.*

El teorema de completud ha sido demostrado en su versión “débil”, es decir, para conjuntos finitos de oraciones. La versión “fuerte”, para conjuntos arbitrarios de oraciones es también cierta, sin embargo, en este caso debemos modificar la construcción para aceptar árboles con ramas infinitas. No abordaremos este problema en estas Notas.

2.5.1 Argumentos correctos y conjuntos sintácticamente inconsistentes

Podemos entonces afirmar que si un conjunto tiene un árbol completo con todas sus ramas cerradas será sintácticamente inconsistente, luego, inconsistente. Esto nos da un método para verificar si un argumento es correcto o no utilizando árboles. En efecto, vimos antes que un argumento es correcto si y solamente si su conjunto contraejemplo es inconsistente.

Veamos unos ejemplos.

Consideremos el argumento más sencillo posible, Modus Ponens:

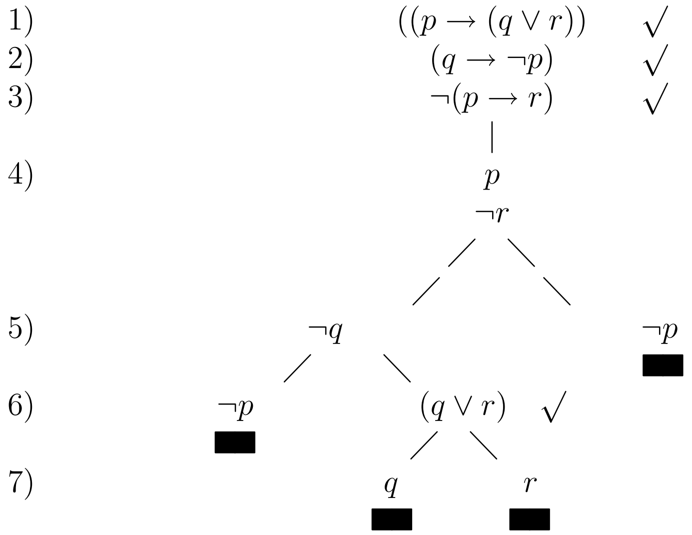
$$(p \to q)\ ,\ q \models q$$

$$\begin{array}{lccc}
1) & & (p \to q) \quad \surd & \\
2) & & p & \\
3) & & \neg q & \\
 & & \diagup \quad \diagdown & \\
4) & \neg p & & q
\end{array}$$

El árbol está completo ya que su oración compuesta ha sido descartada y todas sus ramas se cierran. Por lo tanto el argumento es correcto.

Ejemplo 2:

$$((p \to (q \vee r))\ ,\ (q \to \neg p)\ \models\ (p \to r)$$



Las líneas 1), 2) y 3) son el conjunto contraejemplo del argumento. En la línea 4) se usa la oración 3) (y ésta última se marca con $\surd$). En la línea 5) se usa la oración 2). Como la rama de la derecha contiene p y $\neg p$ podemos cerrarla inmediatamente. En la línea 6) se usa la oración 1). La rama de la izquierda se cierra poque contiene a p y $\neg p$. En la línea 7) se usa la oración compuesta $(q \vee r)$ que había aparecido en la línea anterior. Vemos que ambas ramas se cierran, la de la izquierda porque contiene a q y a $\neg q$, la de la derecha porque contiene a r y $\neg r$. El árbol se ha completado y todas sus ramas están cerradas, luego el argumento es correcto.

Ejemplo 3:

$$((p \vee q) \to r) \ , \ (\neg p \to q) \ , \ (r \to s) \models (r \wedge s)$$

Construyamos ahora un árbol para su conjunto contraejemplo.

1)			$((p \vee q) \rightarrow r)$ $\surd$			
2)			$(\neg p \rightarrow q)$			
3)			$(r \rightarrow s)$			
4)			$\neg(r \wedge s)$			
		/		\		
5)		$\neg(p \vee q)\surd$			r	
		$\mid$		/		\
6)		$\neg p$		$\neg r$		s
7)		$\neg q$		$\blacksquare$	/	\
8)	/		\		$\neg r$	$\neg s$
9)	$\neg\neg p$		q		$\blacksquare$	$\blacksquare$
10)	$\mid$		$\blacksquare$			
11)	p					
	$\blacksquare$					

Vemos que todas las ramas del árbol se han cerrado, luego el argumento es correcto. Es importante hacer notar que, en estricto rigor, el árbol no está completo, ya que algunas oraciones compuestas no han sido usadas en todas las ramas, es decir, no están descartadas. Sin embargo, sería inútil completarlo ya que si una rama ya cumple los requisitos para ser cerrada, al extenderla no se abrirá, seguirá estando cerrada.

3 El Método Axiomático [4]

A continuación describiremos un segundo método mecánico para resolver los problemas que nos interesan, este método es más corto que el de los árboles de Gentzen. Su "desventaja" es que requiere de cierta experiencia algebraica, es decir, en la manipulación simbólica.

Este método, a veces llamado sistemas estilo Hilbert, no es otra cosa que desarrollar un sistema axiomático en base a axiomas o postulados y reglas de inferencia.

[4] Esta sección puede excluirse.

Una *regla de inferencia* sobre $\mathcal{L}$ es un par $\langle \Gamma, \varphi \rangle$, donde $\Gamma \subseteq \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$, Γ es finito y $\varphi \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$.

Diremos que ψ es *directamente demostrable* a partir de Δ por la regla $\langle \Gamma, \varphi \rangle$, si existe una substitución σ tal que $\sigma(\varphi) = \psi$ y $\sigma(\Gamma) \subseteq \Delta$.

Un *axioma* es una regla de la forma $\langle \emptyset, \psi \rangle$. Cualquier sustitución de un axioma es directamente demostrable a partir de cualquier conjunto de fórmulas Δ. Cada sustitución será una *instancia* del axioma. Una formula tal que $\emptyset \vdash \varphi$ es un *teorema* de $\mathcal{S}$ y lo denotamos simplemente $\vdash \varphi$

Un *sistema deductivo* $\mathcal{S}$ sobre $\mathcal{L}$, está determinado por un conjunto de axiomas y de reglas de inferencia. Entenderemos a $\mathcal{S}$ como un par $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ donde $\vdash$ es una relación entre conjuntos de fórmulas y fórmulas definida de la manera siguiente:

$\Delta \vdash \psi$ si y sólo si existe una sucesión finita $\langle \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n \rangle$ de fórmulas de $\mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$, tal que $\varphi_n = \psi$ y para todo $i \leq n$, se cumple alguna de las condiciones siguientes:

- φ_i es una instancia de un axioma.
- $\varphi_i \in \Delta$
- para ciertos $i_1, i_2, \ldots, i_k$ todos menores que i, φ_i es directamente demostrable a partir de $\{\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_k}\}$.

Esta sucesión se llama una *demostración de* ψ *a partir de* Γ. Decimos también que ψ es demostrable (o derivable) a partir de Γ. Una fórmula tal que $\vdash \psi$ es un *teorema* $\mathcal{S}$.

Axiomas del Cálculo Proposicional Clásico

A1	$p \to (q \to p)$
A2	$(p \to q) \to ((p \to (q \to r) \to (p \to r))$
A3	$(p \wedge q) \to p$,
A4	$(p \wedge q) \to q$,
A5	$p \to (q \to (p \wedge q))$,

A6	$p \to (p \vee q)$,
A7	$q \to (p \vee q)$,
A8	$(p \to z) \to ((q \to z) \to ((p \vee q) \to z))$,
A9	$(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$.

Regla: Modus Ponens

MP	$p \to q\ , p \vdash_{CPC}\ q\,.$

Ejemplo. Demostrar $\vdash_{CPC}\ p\ \to p$.

$\sigma_1 = p\ \to\ (p\ \to p)$, (A1),
$\sigma_2 = (p\ \to (p \to p))\ \to\ ((p \to ((p \to p) \to p))\ \to\ (p \to p))$, (A2),
$\sigma_3 = (p \to ((p \to p) \to p))\ \to\ (p \to p)$, (MP),
$\sigma_4 = p \to ((p \to p) \to p)$, (A1),
$\sigma_5 = p\ \to\ p$, (MP).

$\langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5 \rangle$, es una demostración de $p \to p$ a partir del conjunto vacío, o sea, es un teorema de CPC.

3.1 Algunos (Meta)teoremas

El objetivo del CPC es hacer un modelo axiomaático de la noción de argumento correcto, o más precisamente, de su versión formalizada, consecuencia tautológica, que desarrollamos en la sección anterior. Para que esto ocurra se deben cumplir dos condiciones: el sistema debe ser *correcto*, es decir, a partir de un conjunto Γ de oraciones sólo se debe poder demostrar sus consecuencias tautológicas. En particular, los teoremas de CPC deben ser tautologías. Por otra parte, el sistema debe ser *completo*, es decir, a partir de Γ debe ser posible demostrar todas las consecuencias tautológicas. Esto es lo que demostraremos a continuación.

Teorema 4. de Corrección *Si* $\Gamma \vdash \varphi$, *entonces* $\Gamma \models \varphi$.

Demostración. Supongamos que $\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_n \rangle$ es una demostración de φ a partir de Γ. Demostraremos por inducción (sobre n) que $\Gamma \models \sigma_i$.

- Si σ_i es un axioma, basta con verificar que todos ellos son tautologías.
- Si $\sigma_i \in \Gamma$, entonces el resultado es obvio.
- Si σ_i se obtuvo por aplicación de la regla MP sobre σ_i y $\sigma_k = \sigma_j \rightarrow$ $sigma_i$, donde j, $k < i$, entonces por hipótesis de inducción, $\Gamma \models \sigma_j$ y $\Gamma \models \sigma_k$. Basta verificar que MP es también una consecuencia tautológica.

□

Decimos que un conjunto Δ de oraciones es *deductivamente consistente* (o simplemente *consistente*) si de él no se deduce una contradicción, es decir, no existe una oración φ tal que $\Delta \vdash \varphi$ y $\Delta \vdash \neg\varphi$. En caso contrario, Δ se dirá *inconsistente.* Δ se dice *maximal–consistente* si Δ es consistente pero $\Delta \cup \{\psi\}$, para cualquier $\psi \notin \Delta$.

Teorema 5. de la Deducción *Si* $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, *entonces* $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Corolario 2. Contraposición *Si* $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, *entonces* $\Gamma \cup \neg\psi \vdash \neg\varphi$.

Corolario 3. Reducción al Absurdo *Si* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *es inconsistente, entonces* $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

Lema 2. *Todo conjunto consistente de oraciones puede extenderse a un conjunto maximal–consistente.*

Demostración. Sea Δ un conjunto consistente de oraciones. Sea $\beta_0, \beta_1, \beta_2 \ldots$ una enumeración de todas las oraciones de $\mathcal{L}$[5] Definimos recursivamente $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$ como sigue. $\Delta_0 = \Delta$

$$\Delta_{i+1} = \left\{ \begin{array}{ll} \Delta_i \cup \{\beta_i\} & \text{si éste es consistente} \\ \Delta_i & \text{si no lo es.} \end{array} \right\}$$

Es inmediato que para cada i, Δ_i es consistente.

Definimos ahora

$$\overline{\Delta} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Delta_i \,.$$

[5]Es claro que el conjunto de todas las oraciones de de $\mathcal{L}$ es enumerable. Este teorema se puede extender a lenguajes no enumerables usando inducción transfinita.

Es inmediato que $\Delta \subseteq \overline{\Delta}$. Para ver que éste último es consistente, supongamos que no lo es.

Entonces existen demostraciones $\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_n \rangle$ de cierta oración ψ y $\langle \tau_1, \ldots, \tau_m \rangle$ de $\neg\psi$ a partir de $\overline{\Delta}$.

Observemos que el conjunto $\sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \tau_1, \ldots, \tau_m\}$ es inconsistente. Por otra parte, como es finito y todas sus oraciones, o bien pertenecen a Δ, o bien son alguno de los β_i que se agregó en el i–ésimo paso de la definición anterior, $\Sigma \subseteq \Delta_k$, para algún k. Pero entonces Δ_k es inconsistente, lo que contradice nuestra afirmación anterior.

Por último, $\overline{\Delta}$ es maximal–consistente. En efecto, supongamos que $\psi \notin \overline{\Delta}$. Como $\psi = \beta_i$, para algún i, quiere decir que $\Delta_i \cup \{\psi\}$ es inconsistente. Luego $\overline{\Delta} \cup \{\psi\}$ es también inconsistente. □

Teorema 6. *Si Δ es consistente, entonces Δ es satisfactible.*

Demostración. Sea Δ un conjunto consistente de oraciones y sea $\overline{\Delta}$ un conjunto maximal–consistente que lo contiene. Definimos la siguiente valuación. Para cada letra proposicional p,

$$v(p) = \left\{ \begin{array}{lll} V & \text{si} & p \in \overline{\Delta} \\ F & \text{si} & \neg p \in \overline{\Delta}. \end{array} \right\}$$

Como $\overline{\Delta}$ es maximal–consistente, una y sólo una de ellas pertenece a $\overline{\Delta}$. Demostramos ahora por inducción sobre la complejidad de la oración ψ que $v(\psi) = V$ si y sólo si $\psi \in \overline{\Delta}$.

La afirmación es cierta por definición si ψ es una letra proposicional.

Supongamos que $\psi = \vartheta \wedge \varphi$. Entonces $v(\psi) = V$ si y sólo si $v(\vartheta) = V$ y $v(\varphi) = V$ si y sólo si $\vartheta \in \overline{\Delta}$ y $\varphi \in \overline{\Delta}$, por hipótesis de inducción. Esto último implica que $\overline{\Delta} \vdash \vartheta \wedge \varphi$, por axioma y MP, luego por maximalidad, $\vartheta \wedge \varphi \in \overline{\Delta}$.

Recíprocamente, si $\vartheta \wedge \varphi \in \overline{\Delta}$, $\vartheta \in \overline{\Delta}$ y $\varphi \in \overline{\Delta}$, lo que completa la demostración. □

Teorema 7. de Completud *Si $\Gamma \models \varphi$, entonces $\Gamma \vdash \varphi$.*

Demostración. Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que $\Gamma \nvdash$ *vph*. Entonces $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es inconsistente, por el Lema 3. □

II Parte – LOGICA DE PREDICADOS

Al comienzo de estas notas dimos el argumento

Todos los hombres son mortales.
Sócrates es hombre.
Luego Sócrates es mortal.

Vimos que este es un argumento correcto, sin embargo, si lo formalizamos en el lenguaje $\mathcal{L}$ de la lógica proposicional obtendremos

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ q \end{array}}{r}$$

Vemos que, usando las técnicas desarrolladas para $\mathcal{L}$, no podemos demostrar que el argumento es correcto. El problema es que este argumento no es correcto en virtud de cómo se articulan sus oraciones componentes mediante los conectivos lógicos. Este argumento es correcto en virtud de propiedades y relaciones entre objetos o seres (Sócrates) y clases de objetos o seres (los hombres, los mortales).

Así mismo, la oración

Todos los hombres son hombres

es una verdad necesaria; sin embargo, no es una tautología. Nuevamente la estructura de los conectivos lógicos no es suficiente para explicar la necesidad de esa oración.

Desarrollaremos ahora un lenguaje y técnicas que nos permitan estudiar estos ejemplos.

4 El lenguaje $\mathcal{L}_1$

El Lenguaje $\mathcal{L}_1$ está compuesto por los siguientes símbolos.

i) Variables: u, v, x, y, z. $u_1, u_2, u_3, \ldots$

   En general, las últimas letras minúsculas del alfabeto latino, si es necesario con subíndices. En cualquier caso, debe haber una cantidad infinita de constantes

ii) Constantes: a, b, c, d. $a_1, a_2, a_3, \ldots$

   Las primeras letras minúsculas del alfabeto latino. Si es necesario con subíndices. Un lenguaje podría no tener símbolos de constante.

iii) Símbolos de predicado:

$$\begin{array}{l} P^1, Q^1, R^1, \ldots \\ P^2, Q^2, \ldots \\ S^k, K^k, \ldots \end{array}$$

   en general, letras mayúsculas del alfabeto latino con un superíndice, llamado la *aridad* del símbolo. El número de símbolos de predicado de cada aridad puede variar desde ninguno a infinitos.

iv) Conectivos lógicos: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$.

v) Cuantificadores: $\forall, \exists$.

   $\forall$ se llama cuantificador universal, $\exists$ se llama cuantificador existencial.

vi) Paréntesis: (,).

vii) Identidad: $\approx$ (optativo).

Los símbolos anteriores conforman el alfabeto de $\mathcal{L}_1$, las expresiones de $\mathcal{L}_1$ serán cadenas (finitas) de estos símbolos.

Los *términos* de $\mathcal{L}_1$ son las variables y las constantes.

Una *fórmula atómica* es un símbolo de predicado n–ario seguido de n términos de $\mathcal{L}_1$. Para facilitar la lectura los términos van separados por comas y encerrados entre paréntesis, estas comas y paréntesis no son realmente parte de la sintaxis de $\mathcal{L}_1$. Los términos no son necesariamente distintos.

Ejemplos:

$$\begin{array}{l} P^3(x,y,y),\ P^3(a,x,b),\ P^3(a,a,a) \\ Q^1(x),\ Q^1(b),\ Q^1(y) \\ R^2(x,y),\ R^2(x,x),\ R^2(b,a),\ R^2(b,z) \end{array}$$

En general los superíndices no se escriben para que la notación sea más legible. Esto no produce ninguna ambiguedad ya que el número de términos que aparece en la fórmula nos indica su aridad.

Una *fórmula* de $\mathcal{L}_1$ es una expresión construida recursivamente mediante la aplicación de una de las reglas siguientes:

1. Toda fórmula atómica es una fórmula.
2. Si φ es una fórmula $\neg\varphi$ también lo es.
3. Si φ y ψ son fórmulas $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ son fórmulas.
4. Si φ es una fórmula y x es una variable, $\forall x\varphi$ y $\exists x\varphi$ son fórmulas.
5. Sólo las expresiones obtenidas por la aplicación de una de las reglas anteriores es una fórmula de $\mathcal{L}_1$.

Las variables que están cuantificadas se llaman *variables ligadas*, las que no están cuantificadas se llaman *variables libres*. Una *oración* es una fórmula sin variables libres. Por ejemplo, en

$$(\forall x\ P(x,y) \to \forall z\ Q(z))$$

x y z aparecen ligadas, y aparece libre. Obsérvese que en

$$(\forall y\ P(x,y) \to \forall x\ Q(x))$$

la primera aparición de x es libre y la segunda ligada.

Al igual que en el caso de las oraciones de $\mathcal{L}$, la misma definición de fórmula nos da un método para verificar si una cadena de símbolos es o no una fórmula. En efecto, podemos construir su árbol de formación. Al final de cada rama del árbol de una fórmula deberá haber sólo fórmulas atómicas.

Ejemplos:

$$(\forall x P(x,a) \to \exists y(P(x,y) \vee R(y)))$$

$$\begin{array}{ccccc} & \diagup & & \diagdown & \\ \forall x P(x,a) & & & \exists y(P(x,y) \vee R(y)) & \\ | & & & | & \\ | & & & | & \\ P(x,z) & & & (P(x,y) \vee R(y)) & \\ & & \diagup & & \diagdown \\ & P(x,y) & & & R(y) \end{array}$$

El árbol nos indica cómo, a partir de fórmulas atómicas y usando las reglas de formación, podemos reconstruir $(\forall x P(x,a) \to \exists y(P(x,y) \vee R(y)))$, la que por lo tanto es una fórmula.

$$(\forall x P(x,a) \to \exists y(P(x,y) \vee R(Ry)))$$

$$\begin{array}{ccccc} & \diagup & & \diagdown & \\ \forall x P(x,a) & & & (P(x,y) \vee R(R(y))) & \\ | & & \diagup & & \diagdown \\ | & & & & \\ P(x,a) & P(x,y) & & & R(R(y)) \\ & & & & * \end{array}$$

Vemos que la última rama termina en la expresión $R(R(y))$. Como ésta no es ni fórmula atómica ni se obtiene por la aplicación de ninguna otra regla, no es una fórmula, luego $(\forall x P(x,a) \to \exists y(P(x,y) \vee R(Ry)))$ tampoco lo es.

Las fórmulas que aparecen en cada nodo del árbol de formación de una fórmula φ son las *subfórmulas* de φ.

5 Interpretación Intuitiva

Hemos introducido una serie de nuevos símbolos y debemos darle una interpretación.

Las variables y constantes son símbolos que usamos para designar objetos, en el caso de las constantes, estas designan objetos determinados, pueden entenderse como nombres propios. Las variables designan objetos cualesquiera, deben entenderse como las líneas de puntos que uno encuentra en un formulario: cualquier persona puede poner su nombre en ella pero mientras no se ponga uno, la frase carece de sentido. Por ejemplo

$$\ldots \text{ declara bajo juramento que etc. etc.}$$

no significa nada, pero si completamos la línea de puntos:

$$\text{Juan González declara bajo juramento etc. etc.,}$$

adquiere significado.

Los símbolos de predicado nos sirven para hablar de propiedades de los objetos acerca de los que queremos hablar o de relaciones entre ellos. En el primer caso se trata de predicados unarios. Para las relaciones usamos símbolos de predicado binario, ternario o de orden superior. En la mayoría de las aplicaciones basta con símbolos binarios.

Supongamos que hablamos sobre seres humanos y de relaciones entre ellos, por ejemplo, Pedro está enamorado de María.

Necesitamos un símbolo que nos permita relacionar pares de objetos,

$$P(x, y) := x \text{ está enamorado de } y$$

y también necesitamos dos constantes

$$a := \text{Pedro y } b := \text{María}$$

Entonces $P(a, b)$ significa "Pedro está enamorado de María" mientras que $P(b, a)$ significa "María está enamorada de Pedro".

Otros ejemplos:

1. Si $R(x) := x$ es rubio, $R(a)$ significa "Pedro es rubio".

2. Si $M(x, y, z) = x$ es la madre e y es el padre de z y $c :=$ Arturo, entonces $M(b, a, c)$ significa María es la madre y Pedro es el padre de Arturo.

Cuando usamos un lenguaje de primer orden lo primero que hacemos es delimitar el conjunto de objetos sobre los cuales estamos hablando, este conjunto lo llamaremos *universo del discurso*, de esta manera los "objetos" de los que hablamos serán sólo los elementos de este universo y todo lo que digamos se referirá exclusivamente a ellos.

Al definir nuestro universo del discurso estamos delimitando el alcance de las expresiones

"Todos los ... son ..."   y   "Algunos ... son ..."

La oración

"Todas son hermosas".

cambia radicalmente si el universo es los seres humanos, o si es solamente el conjunto de candidatas a Miss Mundo.

En nuestro ejemplo anterior, la oración $\forall x\ P(x, b)$ significa "Todos los seres humanos están enamorados de María". Si cambiamos el contexto, por ejemplo, si el universo del discurso son los habitantes de Chile, esta misma oración significará "Todos los habitantes de Chile están enamorados de María".

Una fórmula como $R(x)$ no significa nada y, como vimos antes, debe entenderse como una frase con un hueco

$$\begin{aligned} R(x) \quad = \quad & \text{"... es rubio", o bien} \\ & \text{"... es un número par", etc.} \end{aligned}$$

Para transformar la fórmula $R(x)$ en una expresión con sentido completo, o sea, una oración, debemos deshacernos del "hueco". Hay dos maneras de hacerlo. Una de ellas es llenar la línea de puntos con un nombre. Dentro de $\mathcal{L}_1$ esto significa reemplazar la variable x por una constante. Así, $R(a)$ significa "Pedro es rubio", que es una oración.

La otra manera de transformar una fórmula en oración es cuantificando sus variables libres. Así, si el universo es el conjunto de los seres humanos, $\forall x\ R(x)$ y $\exists x\ R(x)$ dirán respectivamente: " Todos los seres humanos son rubios" y "Algunos seres humanos son rubios". Nótese que ambas son oraciones.

6 Semántica para $\mathcal{L}_1$

Las indicaciones intuitivas dadas anteriormente se formalizan como sigue.

Un *modelo* (o *interpretación*) para un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}_1$ es un sistema

$$\mathfrak{A} = \langle A; \widehat{R_1}, \ldots, \widehat{R_n}, \widehat{a_1}, \ldots, \widehat{a_m} \rangle,$$

donde A es un conjunto no vacío, llamado el *universo* del modelo, cada $\widehat{R_i}$ es una relación sobre A de la misma aridad que el símbolo de $\mathcal{L}_1$ correspondiente y cada $\widehat{a_i}$ es un objeto de A. A dos constantes distintas, por ejemplo, a_1 y a_2 se le puede asociar un mismo objeto del universo, o sea, $\widehat{a_1} = \widehat{a_2}$.

Decimos que un modelo $\mathfrak{A}$ *satisface* la oración φ, en símbolos, $\models_{\mathfrak{A}} \varphi$ si se verifican las condiciones siguientes.

- $\models_{\mathfrak{A}} R(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ si y solamente si los elementos $\widehat{a_1}, \ldots, \widehat{a_n}$ (en ese orden) están en la relación $\widehat{R_i}$. Obsérvese que los objetos $\widehat{a_i}$ no tienen por qué ser distintos entre sí.

- $\models_{\mathfrak{A}} a_i \approx a_j$ si y solamente si $\widehat{a_i} = \widehat{a_j}$.

- $\models_{\mathfrak{A}} (\neg\psi)$ si y solamente si $\mathfrak{A}$ no satisface la oración ψ.

- Las condiciones de satisfacción para las oraciones del tipo $(\psi \to \vartheta)$, $(\psi \wedge \vartheta)$, $(\psi \vee \vartheta)$ y $(\psi \leftrightarrow \vartheta)$, son las mismas que las de la lógica proposicional. Por ejemplo, $\models_{\mathfrak{A}} (\psi \wedge \vartheta)$ si y solamente si $\models_{\mathfrak{A}} \psi$ y $\models_{\mathfrak{A}} \vartheta$.

- $\models_{\mathfrak{A}} \forall x \psi(x)$ si y solamente si para todo elemento $\widehat{c} \in A$, $\models_{\langle \mathfrak{A}; \widehat{c} \rangle} \psi(x \mid c)$, donde c es una constante nueva (que no pertenece a $\mathcal{L}$) y el modelo $\langle \mathfrak{A}; \widehat{c} \rangle$ es idéntico a $\mathfrak{A}$ pero asigna el objeto $\widehat{c}$ a la nueva constante c.

- $\models_{\mathfrak{A}} \exists x\psi(x)$ si y solamente si para algún elemento $\widehat{c} \in A$, $\models_{\langle \mathfrak{A}; \widehat{c} \rangle} \psi(x \mid c)$, donde c y $\langle \mathfrak{A}; \widehat{c} \rangle$ son como arriba.

Un conjunto de oraciones es *satisfactible* si existe un modelo que las satisfaga a todas ellas.

Una oración de $\mathcal{L}_1$ es *válida*, en símbolos, $\models \varphi$, si todo modelo para $\mathcal{L}_1$ la satisface. Resulta inmediato que una oración es válida si y sólo si su negación no es satisfactible.

Ejemplos:

1. Considere las oraciones

$$\{\forall x \forall y(R(x,y) \rightarrow \neg R(y,x)) \,,\, \forall x \forall y \forall z((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z))\}$$

   Este conjunto es satisfactible ya que si tomamos el modelo cuyo universo es el conjunto de los números naturales y se interpreta $R(x,y)$ como "x es menor que y", ambas oraciones se satisfacen. Se puede inventar infinitos modelos que satisfagan estas dos oraciones.

2. La oración $\forall x(R(x) \rightarrow R(x))$ es válida.

Una oración φ es *consecuencia lógica* del conjunto Σ si todo modelo de Σ es también modelo de φ.

Vemos que el concepto de consecuencia lógica es una versión apropiada para $\mathcal{L}_1$ del concepto de argumento correcto. Un argumento es correcto si la conclusión se satisface en todos los modelos que satisfacen a todas las premisas. Así mismo, una oración válida es una verdad necesaria.

El siguiente teorema dice que el concepto de consecuencia lógica extiende al de consecuencia tautológica. Es por esto que hemos usado el mismo símbolo, $\models$, para ambos. No demostraremos esto aquí porque es inmediato a partir de las definiciones.

Teorema 8. *Si φ es consecuencia tautológica de Σ, entonces $\Sigma \models \varphi$.*

Obsérvese que para verificar una consecuencia lógica (y por ende la corrección de un argumento) tenemos, en principio, que verificar todos los (infinitos) modelos de $\mathcal{L}_1$. En la práctica esto no es así, pero evitar esta tarea imposible requiere de conocimientos de matemática (sobre todo de teoría de conjuntos) que no podemos ni queremos desarrollar aquí. En cambio, desarrollaremos un método sintáctico que nos permitirá resolver estos problemas. También extenderemos el método de los árboles de Gentzen estudiado en la sección sobre lógica proposicional.

7 $\mathcal{L}_1$–Arboles de Gentzen

Extenderemos ahora el método de los árboles de Gentzen para el caso de $\mathcal{L}_1$.

Un árbol de Gentzen para un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}_1$ se construye igual que un árbol para $\mathcal{L}$ agregando las reglas siguientes.

Si en un nodo de una rama aparece la oración indicada, se debe extender esa rama aplicando la regla:

($\forall I$)

$$\begin{array}{c} \forall x\ \varphi(x) \\ | \\ | \\ \varphi(a) \end{array}$$

cualquier constante a, en particular, para cada constante que aparezca en la rama. Las oraciones universales no se descargan.

($\exists I$)

$$\begin{array}{c} \exists x\ \varphi(x) \quad \checkmark \\ | \\ | \\ \varphi(a) \end{array}$$

donde a es una constante que no ha aparecido anteriormente en esa rama. La oración $\exists x\ \varphi(x)$ se descarga una vez aplicada esta regla.

(¬)

$$\begin{array}{c} \neg\forall x\varphi \ \surd \\ | \\ | \\ \exists x\neg\varphi \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg\exists x\varphi \ \surd \\ | \\ | \\ \forall x\neg\varphi \end{array}$$

Las oraciones $\neg\forall x\varphi$ y $\neg\exists x\varphi$ se descargan luego de aplicar estas reglas.

Una rama se cierra si en ella aparecen una oración atómica y su negación.

Una rama se dice completa si se ha cerrado o todas las oraciones que en ella aparecen corresponden a alguna de las siguientes alternativas.

1. Son atómicas o negaciones de atómicas.
2. Han sido descargadas.
3. Son universales y se les ha aplicado la regla $(\forall I)$ con todas las constantes que han aparecido en esa rama. Si no hay constante debe aplicarse la regla al menos una vez con la constante a.

8 El Sistema

Para producir árboles sistemáticamente, sin tomar un camino que potencialmente conduzca a un árbol infinito, pudiendo haber completado antes una rama más "fácil" o corta, se usa el siguiente sistema.

1. Las ramas se cierran tan pronto en ella aparece una oración atómica y su negación. Si todas las ramas se cierran, nos detenemos: el conjunto es inconsistente.
2. Si una rama se completa y permanece abierta, nos detenemos: el conjunto es consistente.
3. En cada paso de la construcción del árbol se descarga primero las oraciones existenciales, las negaciones y las oraciones proposicionales. Si en este proceso aparecen nuevas oraciones de este tipo, se prosigue hasta que todas las oraciones no descargadas del árbol sean atómicas, sus negaciones o sean universales.

4. En cada rama se aplica la regla $(\forall I)$ a cada una de las oraciones universales y con cada una de las constantes que en la rama aparecen. Una vez hecho esto, si no se ha dado el caso 1 o el caso 2, procedemos nuevamente con la alternativa 3 y 4, hasta que el árbol se complete o se cierre.

Obsérvese que si el árbol tiene ramas infinitas este proceso podría no terminar. Eso lo veremos en la próxima sección.

9 Arboles con Ramas Infinitas.

Consideremos la consistencia sintáctica de la oración $\forall x \exists y P(x, y)$. Para ello, debemos construir su árbol.

$$\begin{array}{cc} \forall x \exists y P(x,y) & \\ | & \\ \exists y P(a,y) & \quad \surd \\ | & \\ P(a,b) & \end{array}$$

En este punto vemos que ha aparecido una nueva constante, luego debemos aplicar la regla $(\forall I)$ a la primera oración.

$$
\begin{array}{cc}
\forall x \exists y P(x,y) & \\
| & \\
\exists y P(a,y) & \surd \\
| & \\
P(a,b) & \\
| & \\
\exists y P(b,y) & \surd \\
| & \\
P(b,c) & \\
| & \\
\exists y P(c,y) & \surd \\
| & \\
P(c,d) & \\
\vdots &
\end{array}
$$

El proceso continuará indefinidamente, no puede detenerse usando el método y el árbol generado por esta oración tiene una rama infinita. (En estricto rigor, los árboles no pueden tener ramas infinitas, es decir esta oración no tiene un árbol completo).

La presencia de una rama infinita en el árbol de un conjunto de oraciones no quiere decir que no podamos decidir en un número finito de pasos si el conjunto es sintácticamente consistente. Veamos el siguente ejemplo.

$$
\begin{array}{llll}
 & (\forall x R(x) \to \forall x(R(x) \vee \exists y P(x,y)\,))\ \checkmark & & \\
\diagup & & & \diagdown \\
\neg\forall x R(x)\ \checkmark & & & \forall x(R(x) \vee \exists y P(x,y)\,) \\
| & & & | \\
\exists x \neg R(x)\ \checkmark & & & (R(a) \vee \exists y P(a,y))\ \checkmark \\
| & & \diagup & | \\
\neg R(b) & & R(a) & \exists y P(a,y))\ \checkmark \\
 & & & | \\
 & & & P(a,b) \\
 & & & | \\
 & & & (R(b) \vee \exists y P(b,y))\ \checkmark \\
 & & \diagup & | \\
 & & R(b) & \exists y P(b,y))\ \checkmark \\
 & & & | \\
 & & & P(b,c) \\
 & & & \vdots
\end{array}
$$

Si nos concentraramos en la rama de la derecha, vemos que se generaría una rama infinita. Sin embargo, es claro que las otras tres ramas están completas y abiertas, por lo tanto el conjunto es consistente.

10 Cálculo de Predicados

Presentamos aquí un sistema de axiomas apropiado para la lógica de predicados. Como veremos, este sistema es correcto y completo con respecto a la noción de consecuencia lógica definida en la sección anterior.

Decimos que la variable x aparece libre para el término t en φ si al reemplazar una aparición libre de x por t, no se liga alguna variable de t. En nuestro caso, si t es una constante, entonces toda variable x aparece libre para t. Si $t = y$, entonces la variable x aparece libre para y si x no aparece dentro de una subfórmula de φ de la forma $\forall y\psi$.

Denotamos por $\varphi(x \mid t)$ a la fórmula que se obtiene al reemplazar en la fórmula φla variable x por el término t. La fórmula $\forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi$ es una *generalización* de la fórmula φ.

Axiomas del Cálculo de Predicados Clásico Los axiomas son todas las generalizaciones universales de las siguientes fórmulas:

1. Tautologías.
2. $\forall x\varphi \to \varphi(x \mid t)$, si x aparece libre para t en φ.
3. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$.
4. $\varphi \to \forall x\varphi$, si x no aparece libre en φ.

   Si el lenguaje incluye la identidad, agregamos:

5. $x \approx x$.
6. $(x \approx y \to \varphi \approx \varphi')$
   donde φ' se obtiene reemplazando apariciones libres de x en φ por y. Puede reemplazarse algunas, todas o ninguna.

La única regla de inferencia es Modus Ponens.

Los conceptos de demostración, derivabilidad, teorema, etc. que definimos para el cálculo proposicional se aplican a todos los sistemas deductivos por lo que no los repetiremos aquí.

Los axiomas del tipo 2. dicen que si algo se cumple para todos los objetos, entonces debe también verificarse para cada uno de los objetos del universo. La restricción sobre estos axiomas se justica con el siguiente ejemplo. Consideremos la fórmula $\varphi = \exists y\; x \not\approx y$. Entonces $\forall x\varphi \to \varphi(x \mid y)$ es

$$\forall x \exists y\; x \not\approx y \to \exists y\; y \not\approx y\,.$$

Vemos que el antecedente es verdadero en cualquier universo que contenga al menos dos elementos, pero que el consecuente no es nunca verdadero, por lo tanto, si no restringimos el tipo de sustitución tendremos un axioma que no es “verdadero”, o más técnicamente, el sistema no será correcto.

11 Algunos (Meta)teoremas

Algunos teoremas del cálculo proposicional son ciertos también en este nuevo contexto. En algunos casos las demostraciones son idénticas o se debe hacer pequeñas modificaciones para las nuevas oraciones. Este es el caso de los teoremas de Corrección, de la Deducción, de Contraposición y de Reducción al Absurdo. Los objetivos de este curso no nos permiten dar una demostración de estos teoremas aquí. El lector interesado puede consultar los [?] o [?], en donde encontrará dos caminos para demostra el teorema de completud.

Teorema 9. de Generalización *Si* $\Gamma \vdash \varphi$ *y* x *no aparece libre en ninguna fórmula de* Γ*, entonces* $\Gamma \vdash \forall x \varphi$.

Demostración. Sólo para demostrar este teorema se ha incluido en el sistema a los axiomas de tipo 3. y de tipo 4. □

Teorema 10. Generalización de Constantes

1. *Supongamos que* $\Gamma \vdash \varphi$ *y que la constante* a *no aparece en ninguna fórmula de* Γ*. Entonces existe una variable* y *que no aparece en* φ *tal que* $\Gamma \vdash \forall y \varphi(a \mid y)$.
2. *Supongamos que* $\Gamma \vdash \varphi(x \mid a)$*, donde* a *es una constante que no aparece ni en* φ *ni en ninguna fórmula de* Γ *Entonces* $\Gamma \vdash \forall x \varphi$.

En ambos caso hay una demostración a partir de Γ *que no contiene a la constante* a.

Teorema 11. Regla EI *Supongamos que la constante* a *no aparece en* φ*,* ψ *ni en ninguna fórmula de* Γ*. Suponga además que* $\Gamma \cup \{\varphi(x \mid a)\} \vdash \psi$*. Entonces* $\Gamma \cup \{\exists x \varphi\} \vdash \psi$.

El siguiente teorema es el más importante sobre lenguajes de primer orden. Sus dos formulaciones, en terminos de consecuencia y de consistencia, respectivamente, son equivalentes.

Teorema 12. de Completud (Gödel 1930)

1. *Si* $\Sigma \models \varphi$*, entonces* $\Sigma \vdash \varphi$.

2. *Todo conjunto consistente de oraciones es satisfactible.*

Las dos partes del próximo corolario son también equivalentes.

Teorema 13. de Compacidad

1. *Si* $\Sigma \models \varphi$, *entonces existe* $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, *finito, tal que* $\Sigma_0 \models \varphi$.
2. *Si todo subconjunto finito de* Σ *es satisfactible, entonces* Σ *es satisfactible.*

III Parte – LOGICA MODAL

12 Lógica Modal

La lógica modal estudia los“modos” en que las oraciones son verdaderas o falsas, en particular, su necesidad, posibilidad e imposibilidad. Aristóteles y los filósofos medievales ya se preocuparon de este fenómeno, sin embargo sólo a comienzos del siglo XX se hizo una teoría formal, la que no tuvo una semántica adecuada sino hasta los años 60.

C.I. Lewis veía ciertos problemas con los conectivos materiales de la lógica proposicional clásica. El considera las siguientes oraciones:

1. O bien César murió, o la luna está hecha de queso.
2. O bien Matilde no me ama, o yo soy amado.

Ambas oraciones son verdaderas, pero de una manera diferente. La primera oración es verdadera porque sabemos que César murió. La segunda en cambio es verdadera por la relación que hay las suboraciones que la componen, en otras palabras, independientemente de la situación, la oración es verdadera. La primera es una verdad *contingente*, la segunda es una verdad *necesaria*.

La interpretación material de los conectivos lógicos tiene, según Lewis, consecuencias indeseables. Las más notables son las llamadas paradojas de la implicación material, por ejemplo, las siguientes tautologías de la lógica clásica.

$p \rightarrow (q \rightarrow p)$
$\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$
$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

Lo paradojico de estas tautologias parece estar en que no existe ninguna relación entre las oraciones p y q, sin embargo, no parecen corresponder a propiedades de nuestra idea intuitiva de implicación. Por ejemplo, la tercera tautología afirma que de dos oraciones cualesquiera, una de las dos implica a la otra.

Lewis reclama la necesidad de una interpretación *fuerte* de la implicación que evite estas paradojas y represente mejor nuestras intuiciones acerca de la implicación. En [?] introdujo un nuevo conectivo $p \prec q$ para indicar la implicación fuerte. Se debe estender como "necesariamente p implica q" o bien "es imposible que p y no q". Junto a éste introdujo dos nuevos operadores modales L y M para denotar la necesidad y posibilidad respectivamente. Nosotros usaremos una notación distinta:

$\Box p$ significa "p es necesariamente cierta",

$\Diamond p$ significa "p es posiblemente cierta".

Es claro entonces que no necesitamos el nuevo conectivo de implicación fuerte ya que lo podemos definir como $p \prec q = \Box(p \to q)$.

Lewis propuso varios sistemas de lógica modal que analizaremos en las próximas secciones.

Posteriormente, se ha aplicado una metodología similar para tratar otros operadores que comparten algunas características con los aperadores modales. Entre ellos mencionaremos dos tipos, los operadores llamados *epistémicos* y los deónticos.

Los primeros modelan formas en que conocemos las cosas. Por ejemplo, el operador $\Box$ puede interpretarse como "se sabe que" o "hay una prueba de".

Los operadores deónticos dicen relación con reglas éticas o legales. Por ejemplo, $\Box$ puede interpretarse como "es moralmente obligatorio que" o "es legalmente obligatorio que". En estas notas no estudiaremos sistemas de esta naturaleza, sólo hablaremos de modalidades en el sentido clásico.

12.1 Modalidades

Para desarrollar una teoría de la lógica modal debemos ampliar el lenguaje del C.P.C. agregando los dos sḿbolos de modalidad $\Box$ y $\Diamond$ y una nueva regla de formación de oraciones.

Si α es una oración, entonces $\Box\alpha$ y $\Diamond\alpha$ son oraciones.

Observemos que esto nos permite formar oraciones complejas como $\Diamond\neg\Box p$ y $\neg\Box\Box\Box q$. Oraciones de este tipo, vale decir, una sucesión de los símbolos $\neg$, $\Box$ y *lozenge* se llamará una *modalidad*.

Es inmediato también que al igual que en el caso clásico tenemos aquí lectura única para toda oración. Podemos extender de la manera obvia los áboles de formación de oraciones.

12.2 Mundos Posibles

Pero, ¿qué entendemos por necesariamente verdadero? Una oración es verdadera cuando no existe una situación imaginable en la que ella sea falsa. Esto nos sugiere la idea de los *mundos posibles*. Un mundo posible es una situación o estado de cosas en las que se puede interpretar nuestro lenguaje.

El mundo en que vivimos es un mundo posible. En él la oración " El autor de estas notas es chileno" es una oración verdadera. Sin embargo es fácil ver que esta no es una verdad necesaria, podemos imaginarnos un mundo en el que yo soy español (por ejemplo, el mundo es igual al actual, salvo que yo obtuve la nacionalidad española a través de mi abuelo materno). No discutiremos aquí la naturaleza ontológica de los mundos posibles, lo dejaremos en el plano intuitivo y desarrollaremos un modelo matemático del concepto.

Este modelo matemático, propuesto por S. Kripke en 1963, es al de los *marcos de Kripke*. Los mundos posibles entendidos como situaciones imaginables constan entonces de dos aspectos. El primero es el delas situaciones, el segundo es que, desde mi perspectiva o mundo particular me lo pueda imaginar, que me resulte posible como situación. Un marco de Kripke es un par $\langle W, R\rangle$, donde $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ es el conjunto de los mundos del marco y R es la relación de accesibilidad entre estos mundos.

Cada mundo w_i es un "etado de cosas", es decir, en él cada oración atómica es verdadera o falsa y las complejas serán verdaderas o falsas según reglas adecuadas a su significado intuitivo. Podemos en nuestro contexto identificar cada mundo w_i con una cierta valuación sobre las letras proposicionales.

La relación de accesibilidad modela la idea intuitiva de posibilidad relativa de un mundo con respecto a otro. Así, si w_1 tiene acceso w_2, lo que dnotamos $w_1 R w_2$ significa que el mundo w_2 es posible desde el punto de vista del mundo w_1.

La noción de verdad en un mundo está en referencia al marco al cual pertenece. La verdad $v_w(\alpha)$ de una oración en un mundo w se define recursivamente como sigue.

1. Si α es una letra proposicional p, entonces $v_w(p) = w(p)$ (recordemos que cada mundo es una valuación sobre las letras proposicionales).

2. Si α es una negación, implicación, disyunción o conjunción de oraciones, se usa la definición cásica habitual de valuación que extiende a w.

3. Si $\alpha = \Box\beta$, entonces $v_w(\Box\beta) = V$ si y sólo si $v_{w'}(\beta) = V$ para todo mundo $w' \in W$ tal que wRw'.

4. Si $\alpha = \Diamond\beta$, entonces $v_w(\Box\beta) = V$ si y sólo si existe un mundo $w' \in W$ tal que wRw' y $v_{w'}(\beta) = V$.

Ejemplo. Consideremos el siguiente marco. Una flecha $w_i \longrightarrow w_2$ indica que w_1Rw_2. Análogamente, $w_1 \longleftrightarrow w_2$ indiqua que w_1Rw_2 y w_2Rw_1. La flecha curva $\curvearrowleft$ sobre w indica que wRw.

	p	q	r
w_1	V	V	V
w_2	V	F	F
w_3	F	V	V
w_4	V	F	V
w_5	V	V	F

$$\begin{tikzcd}
w_1 \arrow[r] & w_2 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[loop above] & w_3 \arrow[loop above] \\
& w_4 \arrow[r, leftrightarrow] & w_5 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

	p	q	r	$\Box p$	$\Box\Box p$	$\Box r$	$q \to \Box\Box p$	$((q \to \Box p) \vee \Box r)$	$\Diamond\,((q \to \Box p) \vee \Box\, r)$
w_1	V	V	V	V	F	F	F	F	V
w_2	V	F	F	F	F	F	V	V	V
w_3	F	V	V	F	F	V	F	V	V
w_4	V	F	V	V	F	F	V	V	V
w_5	V	V	F	F	F	V	F	V	V

Una oración α es *verdadera en el marco* $\langle W, R\rangle$ si $v_w(\alpha) = V$ para todo $w \in W$.

Una oración es una tautología modal si y sólo si es verdadera en todo marco. Usaremos el mismo símbolo clásico, $\models \alpha$, para denotar las tautologías modales.

Ejemplos. Las siguientes tautologías modales son consecuencia inmediata de la definición.

1. Si α es una tautología clásica, entonces $\models \Box\alpha$.

2. $\models \Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$ y $\models \Box p \leftrightarrow \neg\Diamond\neg p$.

   Este ejemplo nos indica que basta con introducir una modalidad, ya que la otra se puede definir.

3. $\models \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ $(*)$

4. La oración $\Box p \to p$ no es una tautología modal.

Verifiquemos las dos últimas. Sea $\langle W, R\rangle$ un marco y sea $w \in W$. Supongamos que la oración es falsa en w. Entonces en w $\Box q$ es falsa, pero tanto $\Box(p \to q)$ como $\Box p$ son verdaderas. Entonces de acuardo con 4. existe un mundo $w' \in W$ tal que $v_{w'}(q) = F$ y wRw'. Pero según 3., $v_{w'}(p \to q) = V$ y $v_{w'}(p) = V$ y por Modus Ponens tenemos que $v_{w'}(q) = V$, lo que es una contradicción. Por lo tanto,la oración $(*)$ no puede ser falsa en w o sea, es una tautología modal.

Para ver que $\Box p \to p$ no es tautología modal, basta encontrar un mundo en un marco en el que no sea verdadera. Consideremos

	p
w_1	F
w_2	V
w_3	V

$$\begin{tikzcd} w_1 \arrow[r] \arrow[dr] & w_2 \arrow[loop above] \\ & w_3 \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

Vemos que w_1 accede a los mundos w_2 y w_3 pero no a sí mismo, por lo tanto $v_{w_1}(\Box p) = V$, pero $v_{w_1}(p) = F$, y por lo tanto, $v_{w_1}(\Box p \to p) = F$.

12.3 Algunos axiomas y su justificación.

De todas las posibles oraciones del lenguaje modal las tautologías modales deberán ser tales que reflejen nuestras intuiciones acerca de qué quiere decir necesariamente verdadero.

12.4 El sistema T

Consideremos la oración anterior $\Box p \to p$. Esta oración dice que si p es necesariamente cierta, entonces debe ser cierta. Intuitivamente, esta oración debería ser verdadera. Sin embargo, como vimos más arriba, hay un mundo en un cierto marco el la que esta oración no es verdadera. Si modificamos el marco de tal manera que $w_1 R w_1$ entonces el problema deja de existir.

De hecho consideremos un marco cualquiera $\langle W, R\rangle$ tal que la relación de accesibilidad es reflexiva, esto es, para todo mundo $w \in W,\ wRw$. Entonces $\Box p \to p$ es verdadera en ese marco. Efectivamente, dado cualquier $w \in W$, si suponemos que $v_w(\Box p) = V$, como wRw, tendremos que $v_w(p) = V$ y por lo tanto $v_w(\Box p \to p) = V$.

Recíprocamente, si no exigimos que R sea reflexiva, como vimos $\Box p \to p$ no es cierta.

Llamaremos T–marcos a aquellos cuya relación de accesibilidad R es reflexiva.

La Lógica Modal T está definida por la relación de consecuencia lógica siguiente.

$\Sigma \models_T \varphi$ si y solamente si en todo T–marco en el que todas las oraciones de Σ son verdaderas, φ también es verdadera.

De manera análoga, diremos que Γ es un conjunto T–satisfactible si hay un T–marco en el que son todas sus oraciones verdaderas.

La oración φ es T–válida si y solamente si en todo T–marco φ es verdadera.

12.5 El sistema S4

Consideremos ahora la oración $\Box p \to \Box\Box p$, la que intuitivamente nos dice que si una oración es necesaria, lo es por necesidad. No es casual que una oración sea necesaria.

Si bien esta oración no es tan intuitivamente cierta como la anterior, se ha usado para definir uno de los sistemas más importantes de lógica modal. El siguiente T–marco demuestra que ella no es válida en la lógica T.

	p
w_1	V
w_2	V
w_3	F

$$
\begin{tikzcd}
w_1 \arrow[loop above] \arrow[r] & w_2 \arrow[loop above] \arrow[r] & w_3 \arrow[loop above]
\end{tikzcd}
$$

Vemos que w_1 accede al mundo w_2 pero no a w_3 luego

	p	$\Box$ p	$\Box\Box p$	$\Box p \rightarrow \Box\Box p$
w_1	V	V	F	F
w_2	V	F	F	V
w_3	F	F	F	V

luego $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ es falsa en w_1, osea no es T–válida.

¿Qué falla? El problema es que w_1 no tiene acceso a los mundos a los que accede w_2. Es fácil ver que si exigimos que la relación de accesibilidad sea transitiva, es decir, si wRw' y $w'Rw''$, entonces wRw'', entonces $\Box p \rightarrow \Box\Box p$. Por otra parte ya vimos que si R no es transitiva, la oración no tiene que ser verdadera.

Llamaremos S_4–marcos a aquellos cuya relación de accesibilidad R es reflexiva y transitiva.

La Lógica Modal S_4 está definida por la relación de consecuencia lógica siguiente.

$\Sigma \models_{S_4} \varphi$ si y solamente si en todo S_4–marco en el que todas las oraciones de Σ son verdaderas, φ también es verdadera.

De manera análoga, diremos que Γ es un conjunto S_4–satisfactible si hay un S_4–marco en el que son todas sus oraciones verdaderas.

La oración φ es S_4–válida si y solamente si en todo S_4–marco φ es verdadera.

12.6 El sistema S5

Miremos ahora la oración $p \rightarrow \Box\Diamond p$. Intuitivamente nos dice que si una oración es verdadera, entonces necesariamente debe ser posible. Esta es también una afirmación razonable y da origen a la tercera lógica modal que estudiaremos.

es claro que $p \to \Box\Diamond p$ no es S_4–válida como lo demuestra el siguiente S_4–marco.

	p
w_1	V
w_2	F

$$\begin{tikzcd} w_1 \arrow[r] \arrow[loop above] & w_2 \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

Vemos que w_1 accede al mundo w_2 pero éste no accede a no a w_1 luego

	p	$\Diamond p$	$\Box\Diamond p$	$p \to \Box\Diamond p$
w_1	V	V	F	F
w_2	F	F	F	V

luego $\Box p \to \Box\Box p$ es falsa en w_1, osea no es S_4–válida.

El problema parece ser aquí que los mundos no se acceden recíprocamente. Es fácil ver que si R es simeétrica, (es decir, si wRw', entonces $w'Rw$), entonces $\Box p \to \Box\Box p$ es verdadera.

Llamaremos S_5–marcos a aquellos cuya relación de accesibilidad R es reflexiva, transitiva y simétrica.

La Lógica Modal S_4 está definida por la relación de consecuencia lógica siguiente.

$\Sigma \models_{S_5} \varphi$ si y solamente si en todo S_5–marco en el que todas las oraciones de Σ son verdaderas, φ también es verdadera.

De manera análoga, diremos que Γ es un conjunto S_5–satisfactible si hay un S_5–marco en el que son todas sus oraciones verdaderas.

La oración φ es S_5–válida si y solamente si en todo S_5–marco φ es verdadera.

13 Arboles Modales

Tal como en el Cálculo Proposicional Clásico, podemos construir árboles que nos den un método sintáctico para calcular si una oración es consecuencia de un conjunto de premisas o si un conjunto de oraciones es satisfactible.

Hay tres cosas de las cuales preocuparse. En primer lugar, debemos dar reglas que rijan a las nuevas oraciones. En segundo lugar tenemos que acomodar la existencia de los mundos posibles. Por último debe haber reglas que regulen la relación de accesibilidad.

Los árboles se construyen de manera similar a los árboles para la lógica clásica excepto que cada oración lleva asociada una *etiqueta* o *rótulo.* La etiqueta es un número natural 1, 2, 3, etc. En cada nodo puede aparecer una o más oraciones y también puede aparecer expresiones del tipo iRj donde i y j son etiquetas.

Las reglas del cálculo proposicional clásico siguen siendo válidas, sólo que ahora van acompañadas de la etiqueta correspondiente. La etiqueta de la o las nuevas ramas es la misma de aquella que le dió origen, por ejemplo,

$$
\begin{array}{ccc}
 & (\alpha \to \beta) \quad , \quad i \qquad \surd & \\
 \swarrow & & \searrow \\
\neg\alpha \quad , \quad i & & \beta \quad , \quad i
\end{array}
$$

13.1 Reglas para $\Box$ y $\Diamond$

Hay cuatro reglas adicionales.

$$
\begin{array}{llcll}
(\mathbf{E}\Box) & iRj & \qquad & (\neg\Box) & \neg\Box\alpha \quad , \ i \quad \surd \\
 & \vdots & & & | \\
 & \Box\alpha \quad , \ i & & & | \\
 & | & & & \Diamond\neg\alpha \quad , \ i \\
 & \alpha \quad , \ j & & &
\end{array}
$$

Observaciones:

1) La regla ($E\Box$) (eliminación de $\Box$) debe aplicarse a todos las etiquetas j tales que iRj aparece en esa rama, ya sea antes o después del nodo $\Box\alpha \quad , \ i$.

2) La oración $\Box\alpha$ no se descarga, $\neg\Box\alpha$ se descarga.

$$
(\mathbf{E}\Diamond) \qquad \begin{array}{c} \Diamond\alpha \quad , i \quad \surd \\ | \\ | \\ \alpha \quad , j \\ iRj \end{array} \qquad\qquad (\neg\Diamond) \qquad \begin{array}{c} \neg\Diamond\alpha \quad , i \quad \surd \\ | \\ | \\ \Box\neg\alpha \quad , i \end{array}
$$

Observaciones:

1) La etiqueta j que introduce la regla $(E\Diamond)$ (eliminación de $\Diamond$) debe ser una etiqueta nueva, es decir, no debe aparecer antes en esa rama.

2) Tanto $\Diamond\alpha$ como $\neg\Diamond\alpha$ se descargan.

Diremos que una rama se cierra si en ella aparecen nodos $p \;\; i$ y $\neg p \;\; , i$. Obsérvese que la etiqueta de ambos nodos es la misma, i.

Una rama está completa si todos sus nodos contienen obien oraciones atómicas y sus negaciones, o bien oraciones que han sido descargadas o bien oraciones de tipo $\Box\alpha$ a las que se ha aplicado al menos una vez la regla $E\Box$. Un árbol está completo si todas sus ramas están completas o cerradas.

Los conceptos de teorema, consistencia y consecuencia sintáctica son los mismos que para la lógica clásica.

Ejemplos: Verificar que $(\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q))$ es un teorema.

Debemos ver que la negación de esta oración es inconsistente.

1) $\neg(\ (\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q))\ )\quad , 1 \quad \surd$

2) $\Box(p \rightarrow q) \quad , 1$

3) $\neg(\Box p \rightarrow \Box q) \quad , 1$

4) $\Box p \quad , 1$

5) $\neg\Box q \quad , 1$

6) $\Diamond\neg q \quad , 1$ $\qquad (\neg\Box)$ en 5,

7) $\neg q \quad , 2$ $\qquad (E\Diamond)$ en 6,

8) $1R2$

9) $p \quad , 2$ $\qquad (E\Box)$ en $4, 8$,

10) $(p \rightarrow q) \quad , 2$ $\qquad (E\Box)$ en 2,

11) $\neg p \quad , 2$ $\blacksquare$ $\qquad q \quad , 2$ $\blacksquare$

13.2 Reglas para la Relación de accesibilidad

Hay tres reglas adicionales.

13.2.1 T–árboles

La regla (T) introduce (obligatoriamente) un nodo con la expresión iRi por cada etiqueta i que aparezca en la rama. Es decir.

$$\textbf{(T)} \qquad \begin{array}{c} \alpha\ ,\ i \\ | \\ | \\ iRi \end{array}$$

Un árbol en el que se usa además la regla (T) es T–árbol.

Ejemplo: Verificar que $(\Box p \to p)$ es un T–teorema.

$$
\begin{array}{llcl}
1) & \neg(\Box p \to p) & , 1 & \surd \\
 & \quad | & & \\
2) & \quad 1R1 & & (T) \text{ en } 1, \\
 & \quad | & & \\
3) & \quad \Box p & , 1 & \\
4) & \quad \neg p & , 1 & \\
 & \quad | & & \\
5) & \quad p & , 1 & (E\Box) \text{ en } 3, 2. \\
 & \quad \blacksquare & &
\end{array}
$$

Observemos que si no se usa la regla (T), el árbol no se cierra.

13.2.2 S_4–árboles

Si las expresiones iRj y jRk aparecen en una rama, la regla (S_4) introduce (obligatoriamente) un nodo con la expresión iRk. Es decir.

$$
\begin{array}{lc}
(\mathbf{S_4}) & iRj \\
 & \vdots \\
 & jRk \\
 & | \\
 & iRk
\end{array}
$$

Un T–árbol en el que se usa además la regla (S_4) es S_4–árbol.

Ejemplo: Verificar que $(\Box p \to \Box\Box p)$ es un S_4–teorema.

1)	$\neg(\Box p \to \Box\Box p)\ ,\ 1\ \surd$	
2)	$\Box p\ ,\ 1$	
3)	$\neg\Box\Box p\ ,\ 1\ \surd$	
4)	$\Diamond\neg\Box p\ ,\ 1\ \surd$	$(\neg\Box)$ en 3,
6)	$\neg\Box p\ ,\ 2\ \surd$	$(E\Diamond)$ en 4,
7)	$1R2$	
8)	$\Diamond\neg p\ ,\ 2\ \surd$	$(E\Diamond)$ en 6,
10)	$\neg p\ ,\ 3$	$(E\Diamond)$ en 5,
11)	$2R3$	
12)	$1R3$	S_4 en $7, 11$,
13)	$p\ ,\ 3$	$(E\Box)$ en $3, 12$.
	$\blacksquare$	

Observemos que si no se usa la regla (S_4), el árbol no se cierra.

13.2.3 S_5–árboles

Si la expresión iRj aparece en una rama, la regla (S_5) introduce (obligatoriamente) un nodo con la expresión jRi. Es decir.

$$(\mathbf{S_5}) \qquad \begin{array}{c} iRj \\ | \\ | \\ jRi \end{array}$$

Un S_4–árbol en el que se usa además la regla (S_5) es S_5–árbol.

Ejemplo: Verificar que $(p \to \Box\Diamond p)$ es un S_5–teorema.

$$
\begin{array}{llll}
1) & \neg(p \to \Box\Diamond p)\ ,\ 1 \ \surd & & \\
 & \quad | & & \\
2) & p\ ,\ 1 & & \\
3) & \neg\Box\Diamond p\ ,\ 1 \ \surd & & \\
 & \quad | & & \\
4) & \Diamond\neg\Diamond p\ ,\ 1 \ \surd & & (\neg\Box) \text{ en } 3, \\
 & \quad | & & \\
5) & \neg\Diamond p\ ,\ 2 \ \surd & & (E\Diamond) \text{ en } 4, \\
 & \quad | & & \\
6) & 1R2 & & \\
 & \quad | & & \\
7) & 2R1 & & (S_5) \text{ en } 8, \\
 & \quad | & & \\
8) & \Box\neg p\ ,\ 2 & & (\neg\Diamond) \text{ en } 5, \\
 & \quad | & & \\
9) & \neg p\ ,\ 2 & & (E\Box) \text{ en } 9, 8, \\
 & \quad \blacksquare & &
\end{array}
$$

Observemos que si no se usa la regla (S_5), el árbol no se cierra.

13.3 Teorema de Completud

El siguiente teorema nos dice que los Tárboles, S_4–árboles y S_5–árboles son las contrapartes sintácticas de las lógicas modales T, S_4 y S_5, respectivamente.

Teorema 14. *Sean $\Sigma \cup \{\varphi\}$ es un conjunto de oraciones y S es cualquiera de los sistemas T, S_4 o S_5. Entonces*

1. *$\Sigma \models_S \varphi$ si y solamente si $\Sigma \vdash_S \varphi$.*
2. *Σ es S–satisfactible si y solamente si Σ es S–consistente.*

13.4 Ejercicios.

1. Demuestre que si α es una tautología del cálculo proposicional clásico, entonces $\Box\alpha$ es una tautología modal.

2. Más generalmente, demuestre que si $\models \alpha$ entonces $\models \Box\alpha$.

3. Construya un marco de Kripke M tal que $(\Box\Box p \rightarrow \Box\Box\Box p)$ es verdadera en el mundo w, pero $(\Box p \rightarrow \Box\Box p)$ no lo sea.

4. Considere el siguiente marco.

	p	q
w_1	V	V
w_2	V	F
w_3	F	V

$$\begin{tikzcd} w_1 \arrow[loop above] \arrow[r] \arrow[dr] & w_2 \arrow[loop above] \\ & w_3 \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

Diga si $\Box(p \rightarrow q) \vee \Box(q \rightarrow p)$ es verdadera en este marco. En los casos en los que queda una rama abierta, construya el marco de Kripke asociado y verifique que en este marco la oración original es falsa.

5. El siguiente cuadro resume un marco de Kripke (M,R), donde M está constituido por cuatro mundos relacionados entre sí por la relación de accesibilidad indicada por las flechas del diagrama.

	p	q	r	$\Box p$	$(q \wedge r)$	$((q \wedge r) \rightarrow \Box p)$	$\Diamond((q \wedge r) \rightarrow \Box p)$
m_1	V	V	V		V		
m_2	V	F	F		F		
m_3	F	V	V		V		
m_4	V	F	V		F		

$$\begin{tikzcd} m_1 \arrow[loop above] \arrow[r] & m_2 \arrow[loop above] \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dr, shift left] & m_3 \arrow[loop above] \\ & & m_4 \arrow[loop above] \arrow[ul, shift left] \end{tikzcd}$$

Complete la tabla. Justifique en no más de diez líneas el valor de verdad asignado a $\Box p$ y a $\Diamond((q \wedge r) \rightarrow \Box p)$.

6. Use árboles para verificar:

   (a) $\vdash (\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$)

(b) $\vdash (\Box p \vee \Box q) \rightarrow \Box(p \vee q)\,)$

(c) $\vdash (\Box p \leftrightarrow \Box(\neg p \rightarrow p)\,)$

(d) $\Box p\,,\ \Diamond q \vdash \Diamond(p \wedge q)\,)$

(e) $\vdash (\neg\Diamond p \rightarrow \Box(q \rightarrow p)\,)$

(f) $\nvdash (\Box(p \vee q) \rightarrow (\Box p \vee \Box q)\,)$

(g) $\nvdash (\Diamond p \rightarrow \Diamond\Diamond p\,)$

(h) $\nvdash (\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p\,)$

(i) $\nvdash \Diamond(p \vee \neg p\,)$

7. En el ejercicio anterior ¿cambia alguno de los resultados si usamos T–árboles, S_4–árboles o S_5–árboles?

8. Demuestre que las siguientes oraciones son T–teoremas.

   (a) $\vdash (\Box(p \rightarrow q) \wedge \Box(q \rightarrow r)\,) \rightarrow \Box(p \rightarrow r)\,)$

   (b) $\vdash (\Box(p \rightarrow q) \wedge \Diamond(p \wedge r)\,) \rightarrow \Diamond(q \wedge r)\,)$

   (c) $\vdash ((\Diamond\neg p \vee \Diamond\neg q) \vee \Diamond(p \vee q)\,)$

9. Demuestre que las siguientes oraciones son S_4–teoremas.

   (a) $\vdash (\,(\Box p \vee \Box q) \leftrightarrow \Box(\Box p \vee \Box q)\,)$

   (b) $\vdash \Box(\Box(p \leftrightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (\Box(p \leftrightarrow q) \rightarrow \Box r)\,)$

Bibliografía

[1] Bergman, M., Moor, J., and Nelson, J., *The Logic Book*, Random House, New York, 1980.

[2] Copi, Irving, *Introducción a la Lógica*. Eudeba, 1964.

[3] Hodges, Wilfrid. *Logic*, Penguin, 1982.

[4] Mates, Benson, *Elementary Logic*, Oxford University Press, 1972.

[5] Priest, Graham, *An Introduction to Non–Classical Logic*, Cambridge Univ. Press, 2001.

[6] Tarski, Alfred. *Introducción a la Lógica y a la Metodología de la Ciencias Deductivas*. Espasa–Calpe, 1968.